

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

19. Band, Heft 3

19. November 1938

S. 97—144

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Gentzen, Gerhard: Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. *Deutsche Math.* 3, 255—268 (1938).

The main theme of this expository article is to contrast the constructive and "an sich" conceptions of infinity, and then to defend the opinion that the Hilbert program makes it possible for the two sides to agree on the retention of classical analysis in its present form. The author begins with a general discussion of the two points of view and of the Hilbert program. He then gives an elementary account of the principal metatheoretic theorems relating to consistency and completeness, including certain theorems of Gödel and Skolem. The upshot of this is that although a constructive consistency proof for classical analysis has not yet been found, yet the author thinks it probable that such a proof will be found, using methods which, like those of the authors proof for arithmetic (this Zbl. 14, 388) are acceptable from the constructive viewpoint, even though they cannot be formalized within the system. The author devotes a section to the contrast of the two views in regard to the continuum, in which the greater complexity and restrictedness, as well as the greater intuitive evidence of the constructive view point is made clear. In the final section he discusses the unification of the schools. The argument is that the significance of the classical theorems come from their usefulness in physics, and that they can be interpreted from a constructive viewpoint by the method of ideal elements (Hilbert). Gentzen makes an interesting comparison with another instance of the simplifications which come through idealization of experience, viz. geometry; here the constructive analysis is compared to the "natural geometry" of Hjelmslev (Hamburg 1923), while the classical analysis is analogous to the ordinary geometry of idealized points and lines.

H. B. Curry (Princeton).

Steck, Max: Zum Problem der mathematischen Existenz. (Eine Auseinandersetzung.) *Deutsche Math.* 3, 467—473 (1938).

Stellungnahme zu der Dissertation von von Freytag gen. Löringhoff (dies. Zbl. 16, 3).

A. Heyting (Laren, N. H.).

Pepis, Józef: Über das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionen-kalküls. *Arch. Towarz. nauk. Lwów* 7, H. 8, 1—170 u. dtsh. Zusammenfassung 170—172 (1937) [Polnisch].

Die Arbeit Pepis' bringt außer einer systematischen Darstellung mancher früher bekannten Ergebnisse auch mehrere neue Reduktionsformen des Entscheidungsproblems, deren Mehrzahl übrigens auch in einer später erschienenen Abhandlung des Verf. (dies. Zbl. 18, 385) zu finden ist. Diese neuen Sätze stellen größtenteils Verschärfungen der eigenen Ergebnisse (dies. Zbl. 14, 98) des Verf. dar, wobei die Verschärfung auf einer weiteren Reduktion der Anzahl der Funktionsvariablen beruht. So z. B. lautet einer der Sätze, daß das allgemeine Entscheidungsproblem lösbar wäre, falls man es für Ausdrücke von der Form $(x_1)(x_2)(Ey_1) \dots (Ey_n)(x_3)\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_n)$ lösen könnte, wobei der quantorenfreie Ausdruck \mathfrak{A} nur drei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthält. — Die Beweismethoden sind dieselben wie in zwei oben zitierten Arbeiten des Verf. und gehören den mengentheoretischen (als Gegensatz zu den beweistheoretischen) Methoden an. Der Verf. verspricht übrigens, seine Ergebnisse in einer künftigen Arbeit auch auf die beweistheoretische Weise zu begründen. — Pepis bespricht auch die Bedeutung, die die Lösung des Entscheidungsproblems für die Arithmetik hätte, und zeigt, wie das Fermatsche Problem auf die Lösung des Ent-

scheidungsproblems zurückzuführen ist. Die Bemerkung, wonach keine analoge Zurückführung des Problems der Existenz unendlich vieler Paare von Primzahlen mit der Differenz 2 bis jetzt bekannt sei, scheint uns verfehlt zu sein. Man braucht ja nur das genannte Problem in der Form darzustellen: Zu jeder Zahl x gibt es eine Primzahl $y > x$, so daß $y + 2$ eine Primzahl ist.

A. Mostowski (Warszawa).

Tarski, Alfred: Eine äquivalente Formulierung des Auswahlaxioms. *Fundam. Math.* 30, 197—201 (1938).

Der Verf. stellt einen Satz auf, der auf Grund des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems dem Auswahlaxiom äquivalent ist. Dieser Satz lautet folgendermaßen: Zu jeder Menge N gibt es eine Menge M derart, daß X dann und nur dann ein Element von M ist, wenn X eine Teilmenge von M ist und wenn dabei N mit keiner Teilmenge von X gleichmächtig ist. Dieser Satz kann auch etwas abgeschwächt werden. Die Beweismethode erinnert an einen früheren Aufsatz desselben Verf. (vgl. dies. Zbl. 18, 347).

H. B. Curry (Princeton).

Belinfante, M. J.: Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. *Compositio Math.* 6, 118—123 (1938).

Belinfante, M. J.: Der Lévy'sche Umordnungssatz und seine intuitionistische Übertragung. *Compositio Math.* 6, 124—135 (1938).

Der Satz, daß man aus einer konvergenten, nicht absolut konvergenten Reihe mit reellen Gliedern durch Umordnung jede reelle Zahl als Summe erhalten kann, und die entsprechenden Sätze über Reihen mit komplexen Gliedern werden hier für die intuitionistische Mathematik formuliert und sowohl im Fall der negativen als der positiven Konvergenz bewiesen.

A. Heyting (Laren).

● Hermes, Hans: Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik. (Forsch. z. Logik u. z. Grundlegung d. exakt. Wiss. N. F. Hrsg. v. Heinrich Scholz. Unter Mitwirkung v. W. Ackermann, F. Bachmann, G. Gentzen u. A. Kratzer. H. 3.) Leipzig: S. Hirzel 1938. 48 S. RM. 2.20.

Diese Dissertation enthält den Versuch, ein Axiomensystem der Mechanik der deformierbaren Körper unter Zugrundelegung der Lorentztransformation („allgemeine Mechanik“) in logistischer Darstellung anzugeben, wobei die gesamte Kinematik axiomatisch vorausgesetzt wird. Das schrittweise erarbeitete Axiomensystem enthält genau zwei Grundbegriffe: a) „Klasse der zulässigen Bezugssysteme“ (Inertialsysteme, Bzs) und b) „Genidentitätsrelation“ (Gid). Jedes Axiom ist im Prinzip in diesen beiden Grundbegriffen anschreibbar; die Fülle der zwischengeschalteten Definitionen dient nur der leichteren Mittelbarkeit. — Es werden zuerst die kinematischen Grundbegriffe axiomatisch gefaßt (Axiome A. 4, 1, A. 4, 2, die die wichtigsten Eigenschaften von Gid postulieren; Axiome A. 4, 3, 4, 5, 6, die die Eigenschaften von Bzs festlegen). Bei der letzteren axiomatischen Fassung heißt es: „In Übereinstimmung mit der Erfahrung (vom Ref. gesperrt) charakterisieren wir einen ‚momentanen materiellen Punkt‘ durch die Angabe von vier (reellen) Koordinaten, d. h. eines vierdimensionalen Vektors“ (S. 12). Nach Ansicht des Ref. müßte für eine formale (axiomatische) Darstellung der „Mechanik“ auch die Notwendigkeit dieser Charakteristik durch Axiome festgelegt sein; es gibt für eine grundsätzlich „von vorn“ beginnende Axiomatisierung der Mechanik keine „Übereinstimmung mit der Erfahrung“. Was ist hier „Erfahrung“? — Dieser Begriff müßte in das Axiomensystem eingehen, wovon natürlich keine Rede sein kann. Ref. hält daher die auf den Grundbegriff Bzs bezüglichen weiteren Ausführungen des Verf. für verfehlt, da in die axiomatische Fassung der Eigenschaften von Bzs im Sinne des vorgelegten Axiomensystems vorsystematische und vorlogische Begriffe und Relationen („Erfahrung“, „Übereinstimmung mit der Erfahrung“, „Kennzeichnung“ usw.) eingehen und gerade die zentralen Begriffe der Mechanik und ihre Eigenschaften (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impulsevektor, Masse) an Bzs hängen. Ref. kann daher nur von einem Versuch der Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik sprechen. — Die zwei Forderungen des Verf. nach „logistischer Strenge“ und „das Bestreben, mit möglichst wenig Grundbegriffen auszukommen“, sind in dem vorgelegten Aufbau daher nur teilweise erfüllt; über die Darstellung gibt Verf. selbst folgendes zu: „Sehen wir uns unsere Axiome auf ihre Einfachheit hin an, so müssen wir allerdings die Feststellung machen, daß wir hier von einem Idealzustand noch sehr weit entfernt sind“ (S. 45). Ref. vermißt außerdem die Erprobung der Tragweite des vorgelegten Axiomensystems an einem allgemeinen mechanischen Satz und seiner axiomatischen Begründung sowie Widerspruchslösungs- und Unabhängigkeitsbeweise. Es kann dies offenbar nicht dadurch erreicht werden, daß einfach gesagt wird: „Auf der Basis unserer Axiome läßt sich die gesamte allgemeine Mechanik über

der Lorentztransformation aufbauen“ und gewisse Formeln angeschrieben werden. Von Vorzug bei dieser Art der Axiomatisierung scheint zu sein, daß, wenn in zwei Axiomen (A. 4, 5 und A. 4, 6) die „Klasse der Lorentztransformationen“ durch die „Klasse der Galileitransformationen“ ersetzt und unter Σ eine „Galileitransformation“ verstanden wird, man ein Axiomensystem für die auf der Galileitransformation aufgebaute Mechanik („klassische Mechanik“) erhält. Dabei ist aber der vom Ref. und H. Dingler aufgewiesene Zusammenhang zwischen Galilei- und Lorentztransformation [Die Lorentztransformation als ein Element der klassischen Mechanik. Physik. Z. **36**, 46—50 (1935); dies. Zbl. **11**, 136] gänzlich unberücksichtigt geblieben, obwohl er für den hier verwendeten Grundbegriff Bzs zentral steht und einer ausführlicheren Analyse wert erscheint, für den Einbau in eine Axiomatik der Mechanik nach Ansicht des Ref. außerdem aber unumgänglich ist. Steck (München).

Geschichtliches.

Conte, Luigi: Dalla „sezione del cono“ di Sereno. Period. Mat., IV. s. 18, 70—86 (1938).

Übersetzung der ersten 14 Sätze der „Kegelschnitte“ des Serenus Ant. mit kommentierenden Bemerkungen. Die kommentierte Übersetzung von P. Ver Eecke (1929) scheint Verf. entgangen zu sein. O. Neugebauer (Kopenhagen).

Neugebauer, O., und A. Volten: Untersuchungen zur antiken Astronomie. IV. Ein demotischer astronomischer Papyrus (Pap. Carlsberg 9). Quell. Stud. Gesch. Math. B 4, 383—406 (1938).

Die besondere Bedeutung des neuen Textes liegt darin, daß es bisher der erste Text ist, der uns von einer ägyptischen mathematischen Astronomie Kunde gibt. Obwohl durch Benutzung des Jahres Antoninus Pius 7 (d. i. 144 n. Chr.) seine Niederschrift auf die Mitte des 2. Jhdts. n. Chr. festgelegt wird, kann es keinem Zweifel unterliegen, daß er ältere ägypt. Rechenverfahren wiedergibt, da er keine Spur einer Beeinflussung durch die gleichzeitige hellenistische Astronomie zeigt und sich seinem Habitus nach ganz in das Bild fügt, das wir aus den älteren mathematischen Texten von ägypt. Wissenschaft gewonnen haben. Die Verf. legen das Erhaltene in Photographie, Transkription und Übersetzung vor; die Gleichartigkeit des Wortlauts der Sätze gestattet es, vieles Zerstückte zu ergänzen. Aus den (z. T. durch Schreibfehler entstellten) Zahlenangaben ist es gelungen, die astronomische Bedeutung zu klären: Es handelt sich um eine Liste der Daten der tatsächlichen Anfänge der Mondmonate im ägypt. Kalender, die mit einem Zyklus von 25 ägypt. Jahren arbeitet. Die zu Grunde gelegte (sehr genaue) Periodenrelation ist: 25 ägypt. Jahre = 309 synod. Monate = 9125 Tage. Abgesehen von dieser wird nichts Astronomisches benutzt, insbesondere bleiben im Gegensatz zu den babylonischen und griechischen astronomischen Texten die Anomalien von Sonnen- und Mondbewegung unbeachtet. Auch hier beruht also die Genauigkeit der Angaben nicht auf instrumentellen Messungen, sondern nur auf Abzählungen von Perioden über hinreichend große Zeiträume. Bessel-Hagen.

Neugebauer, O.: Untersuchungen zur antiken Astronomie. V. Der Halleysche „Saros“ und andere Ergänzungen zu UAA III. Quell. Stud. Gesch. Math. B 4, 407—411 (1938).

Nach Abschluß der Abh. UAA III (vgl. dies. Zbl. **18**, 49) ist es Verf. gelungen, die Stelle aufzufinden, wo Halley die Terminologie „Saros“ für die Finsternisperiode von 223 synodischen Monaten eingeführt hat: 1691 in einer in den Philos. Trans. erschienenen Note über drei Stellen aus Plinius' Naturalis historia. Gleichzeitig legt Verf. drei Stellen von Joh. Ephr. Scheibel (ca. 1770—1780), Montucla (1758) und Joh. Friedr. Weidler (1751) vor, durch die er auf den Ort der Halleyschen Veröffentlichung geführt wurde und von denen die erstgenannte durch die ungewöhnliche Häufung von Irrtümern und Mißverständnissen besonders amüsant ist. — Der Rest betrifft eine metrologische Frage, kleine Berichtigungen zu UAA II, und UAA III und eine Ergänzung des Textverzeichnisses in UAA III. Bessel-Hagen (Bonn).

Neugebauer, O.: Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria—Rom bei Heron. Hist.-fil. Medd., Danske Vid. Sels. 26, Nr 2, 26 S. u. 5 Taf. (1938).

In Kap. 35 seiner „Dioptra“ behandelt Heron als Beispiel die Aufgabe, die Entfernung zwischen Rom und Alexandria, längs dem Großkreis gemessen, zu bestimmen. Als gegeben wird dabei angesehen der Erdumfang, der Unterschied der Ortszeiten, zu denen ein und dieselbe Mondfinsternis in Alexandria und Rom beobachtet wurde, und die Länge der Sonne bei dieser Finsternis. Verf. interpretiert den Text durch den Nachweis, daß Heron abwechselnd an zweierlei Figuren operiert, einem sog. Analemma und einem räumlichen Halbkugelmodell. Für das Analemma gibt er die Darstellung wieder, die Vitruv davon entworfen hat. In einem Korrekturzusatz weist Verf. darauf hin, daß A. Rome bereits vor ihm dieselbe Erklärung des Kap. 35 der Dioptra gegeben hat [Ann. Soc. Sci. Bruxelles 42 (1923), Mémoires 234—258]. In einem Anhang werden Folgerungen für die vielumstrittene Lebenszeit Herons gezogen. Da unter den in Alexandria zwischen — 200 und + 300 sichtbaren Mondfinsternissen einzig die vom 13. März 62 mit den von Heron gegebenen Daten übereinstimmt, und zwar ausgezeichnet, und es sehr unwahrscheinlich ist, daß diese Übereinstimmung auf reinem Zufall beruht, legt Verf. mit aller Vorsicht es nahe, die Lebenszeit Herons auf das Ende des 1. Jahrh. n. Chr. anzusetzen. *Bessel-Hagen (Bonn).*

Subramani Iyer, H.: Papers on Hindu astronomy. I. A method of computing the beginning of the Indian solar year. Math. Student 5, 96—99 (1937).

Datta, Bibhutibhusan: Application of indeterminate analysis to astronomical problems. Archeion 21, 28—34 (1938).

Aufzählung verschiedener astronomischer Aufgaben, die auf lineare diophantische Gleichungen führen und von indischen Astronomen des 6-ten Jahrh. n. Chr. gelöst worden sind. *O. Neugebauer (Kopenhagen).*

Ludendorff, H.: Astronomische Inschriften in Palengue. (Untersuchungen zur Astronomie der Maya, Nr. 12.) Abh. preuß. Akad. Wiss. 1938, 1—60.

Ludendorff, Hans: Astronomische Inschriften in Palenque. Forsch. u. Fortschr. 14, 237—238 (1938).

Dittrich, A.: La chronologie et l'astronomie des Mayas. Scientia 63, 211—218 (1938).

Bericht über die verschiedenen Ansichten und Methoden einer astronomischen Fixierung des Anfangspunktes der Maya-Chronologie. *O. Neugebauer.*

Loria, Gino: Le prétendu „Larcin“ de Torricelli. Archeion 21, 62—68 (1938).

L'auteur attire l'attention des historiens des mathématiques sur la persistance de l'accusation contre Torricelli à sujet de l'invention et de la quadrature de la cycloïde. Cette accusation fut formulée par Pascal dans son Histoire de la Roulette; malgré sa réfutation par C. Dati (1662) et J. Groening (1701) et sa contradiction par Montucla, Brunschvicg, Boutroux et Garier elle continue à figurer dans les Origines de la Statique de P. Duhem, dont elle révèle, une fois de plus, la constante attitude anti-galiléenne. *Dijksterhuis (Oisterwijk, Holl.).*

Hofmann, Jos. E.: Nicolaus Mercators Logarithmotechnia (1668). Deutsche Math. 3, 446—466 (1938).

Verf. berichtet über das in Werken über Geschichte der Mathematik zwar erwähnte, aber offenbar selten genau untersuchte Werk des Holsteiners N. Mercator. Die Einleitung enthält ein direktes Verfahren zur Berechnung dekadischer Logarithmen durch fortgesetzte Multiplikation; die Methode ist grundsätzlich bedeutsam, da nur rational gerechnet wird. Hiernach liefert Mercator einen Beitrag zur Differenzenrechnung, in dem der Gedanke, die Glieder einer Reihe aus den Anfangsgliedern der aufeinanderfolgenden Differenzenreihen aufzubauen, klar hervortritt. Die nächsten drei Sätze führen zu Näherungswerten für das Maß (d. h. die mensura rationis, die dem Logarithmus proportional ist) einer Wurzel; die schwierigen Ausführungen Mer-

cators werden vom Verf. eingehend erläutert. Es folgt die praktische Berechnung einer Logarithmentafel, ein gut verwendbares Verfahren, das aber, wie der ganze hier abschließende erste (schon 1667 veröffentlichte) Teil des Werkes von den Zeitgenossen fast unbeachtet geblieben ist. Der zweite Teil enthält geometrische Betrachtungen über die gleichseitige Hyperbel, die zur Quadratur der Kurve durch die (in Worten ausgesprochene) logarithmische Reihe führen und die mit einem Satz über Summierung der Logarithmen beendet werden. Von dem Aufsehen, das dieser zweite (1668 erschienene) Teil sofort erregte, zeugen zwei Briefe über die Hyperbelquadratur, die J. Wallis anlässlich des Mercatorschen Werkes an Brouncker schrieb; als Anhang zu diesen Briefen lieferte Mercator noch eine Abhandlung über die Berechnung der natürlichen Logarithmen.
Dijksterhuis (Oisterwijk, Holland).

Andrade, E. N. da C.: Science in the seventeenth century. *Nature*, Lond. 142, 19—30 (1938).

Jong, C. de, and W. Hope-Jones: Ludolph (or Ludolff or Lucius) van Ceulen. *Math. Gaz.* 22, 281—282 (1938).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Walker, Laurence R.: A note on the determinant of certain matrices. *J. Math. Physics*, Massachusetts Inst. Technol. 17, 1—4 (1938).

L'au. donne une démonstration directe d'un théorème de Gewertz (*J. Math. Physics* 5, 1) sous une forme plus complète: le déterminant des parties réelles des éléments d'une matrices carrée des éléments complexes a le même signe avec le déterminant des parties réelles des éléments de la matrice inverse. Les déterminants des parties imaginaires des éléments des mêmes matrices sont du même signe si l'ordre est pair et des signes opposés si l'ordre est impair.
N. Obrechhoff (Sofia).

Flood, Merrill M.: Equivalence of pairs of matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 8—17 (1938).

A treatment by elementary rational methods of the problem of reducing a matrix pencil to canonical form. The method, based on a simple lemma concerning the rank of a special pencil, resembles that used by Ingraham and Wegner (this Zbl. 12, 99) for Hermitian pencils. Contact is established with Williamson's theorem (this Zbl. 14, 196) that the 2nd central differences of the row nullities of Turnbull's matrices M_k give the multiplicities of the Kronecker indices for rows; and similarly for columns.
A. C. Aiken (Edinburgh).

König, Karl: Symmetrisch-angeordnete Erweiterungen des Diagonalmatrizenrings. *Mitt. math. Ges. Hamburg* 7, 400—402 (1938).

Die quadratischen Matrizen, die nur in der Haupt- und Nebendiagonale Elemente $\neq 0$ haben, bilden einen Ring. Es werden Erweiterungen dieses Ringes untersucht, die aus Matrizen bestehen, die symmetrisch bezüglich der beiden Diagonalen sind und nur zwei Elemente $\neq 0$ in jeder Zeile enthalten.
G. Köthe (Münster i. W.).

Schmidt, Hermann: Zur Faktorenzerlegung reeller Polynome einer Veränderlichen. *Jber. dtsh. Math.-Ver.* 46, Abt. 2, 64—67 (1936).

Verf. gibt einen neuen Beweis des „Fundamentalsatzes der Algebra“ ohne das Eindringen in das komplexe Gebiet, indem er zeigt, daß jedes reelle Polynom stets durch ein reelles Polynom entweder ersten oder zweiten Grades teilbar ist (vgl. S. Wigert, dies. Zbl. 15, 97).
N. Tschebotarow (Kasan).

Bohlin, Karl: Sur la solution de l'équation du cinquième degré. *Ann. Mat. pura appl.* IV. s. 16, 183—208 (1937).

Verf. vervollständigt seine früheren Untersuchungen über die Lösung der Gleichung fünften Grades, indem er besondere Beachtung auf die hier auftretenden Singularitäten legt.
N. Tschebotarow (Kasan).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Nesbitt, C.: On the regular representations of algebras. Ann. of Math., II. s. 39, 634—658 (1938).

α sei eine Algebra mit Einselement über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K , $\alpha = \varepsilon_1 K + \dots + \varepsilon_n K$. Durch $\varepsilon_i \alpha = \sum_{j=1}^n r_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_j$ wird jedem $\alpha \in \alpha$ eine Matrix $R(\alpha) = (r_{ij}^{(\alpha)})$ zugeordnet; $\alpha \rightarrow R(\alpha)$ ist eine treue Darstellung \mathfrak{R} von α , die erste reguläre Darstellung.

Durch $\alpha \varepsilon_i = \sum_{j=1}^n s_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_j$ wird die zweite reguläre Darstellung \mathfrak{S} , $\alpha \rightarrow S(\alpha) = (s_{ij}^{(\alpha)})$ von α definiert. Die Darstellung \mathfrak{B} von α heißt h -mal mit der Darstellung \mathfrak{U} verbunden,

wenn es genau h linear unabhängige Matrizen P mit $B(\alpha)P = PC(\alpha)$ für alle $\alpha \in \alpha$ gibt. Es wird $h = I(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ gesetzt. Enthält \mathfrak{B} keine irreduzible Nulldarstellung, so ist $I(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = I(\mathfrak{B}, \mathfrak{S}) = \text{Grad von } \mathfrak{B}$. — α kann als direkte Summe seines Radikals \mathfrak{R} und einer halbeinfachen Algebra \mathfrak{L} geschrieben werden, die Summe von k einfachen Algebren \mathfrak{L}_ν sei. Zu jedem \mathfrak{L}_ν gehört eine irreduzible Darstellung f_ν -ten Grades \mathfrak{F}_ν von α , die \mathfrak{L}_ν treu und die anderen \mathfrak{L}_μ durch Nullen darstellt. E_ν sei die Eins von \mathfrak{L}_ν . $A_{\nu\mu} \in \alpha$ heißt vom Typus (ν, μ) , wenn $E_\nu A_{\nu\mu} E_\mu = A_{\nu\mu}$ ist. Die Anzahl der linear unabhängigen Elemente vom Typus (ν, μ) in α ist $f_\nu f_\mu c_{\nu\mu}$ mit ganzem $c_{\nu\mu}$. Die $c_{\nu\mu}$ heißen die Cartaninvarianten von α . Durch eine passende, nach den Potenzen von \mathfrak{R} und den Typen (ν, μ) aufgeteilte Basis wird erreicht, daß die zweite reguläre Darstellung \mathfrak{S} in unzerfällbare Bestandteile $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$ zerfällt, deren Anzahl gleich der Anzahl k der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von α ist, und zwar so, daß \mathfrak{B}_ν als ersten irreduziblen Bestandteil gerade \mathfrak{F}_ν hat: $\mathfrak{B}_\nu = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_\nu & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$. Dies ist die einzige

Reduktion von \mathfrak{B}_ν mit einem vollständig reduzierten Bestandteil an erster Stelle. Dadurch sind also die \mathfrak{B}_ν den \mathfrak{F}_ν eindeutig zugeordnet. Für \mathfrak{R} gelten natürlich entsprechende Sätze, hier hat aber ein unzerfällbarer Bestandteil \mathfrak{U}_ν das zugehörige \mathfrak{F}_ν am Schluß. \mathfrak{B}_ν kommt in \mathfrak{S}_ν gerade f_ν -mal als unzerfällbarer Bestandteil vor. \mathfrak{F}_ν kommt $c_{\nu\lambda}$ -mal als irreduzibler Bestandteil von \mathfrak{B}_λ vor. Ist v_ν der Grad von \mathfrak{B}_ν , so kommt \mathfrak{F}_ν gerade v_ν -mal in \mathfrak{R} vor. Die Cartaninvarianten von \mathfrak{S} erhält man aus denen von \mathfrak{R} durch Vertauschen der Indizes. Enthält die Darstellung \mathfrak{B} von α gerade h_ν -mal \mathfrak{F}_ν , so ist

$h_\nu = I(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_\nu)$. Nach Frobenius gilt: Sind $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ allgemeine Elemente von α , so ist die Determinante $|S(x) + R'(y)| = \prod_{\kappa, \lambda} \psi_{\kappa\lambda}^{c_{\kappa\lambda}}$ mit $\psi_{\kappa\lambda} = \prod_{\alpha, \beta} (u_\kappa^{(\alpha)} + v_\lambda^{(\beta)})$,

wo $u_\kappa^{(\alpha)}$ die charakteristischen Wurzeln der x in \mathfrak{F}_κ darstellenden Matrix und $v_\lambda^{(\beta)}$ die der y in \mathfrak{F}_λ darstellenden Matrix durchläuft. Die $\psi_{\kappa\lambda}$ sind untereinander verschiedene irreduzible Polynome. — Nach Frobenius sind \mathfrak{R} und \mathfrak{S} genau dann äquivalent,

wenn für Unbestimmte z_1, \dots, z_n das Polynom $\left| \sum_{m=1}^n r_{im}^{(\alpha)} z_m \right| \neq 0$ ist. Diese Bedingung

wird umgeformt in: kein $(n-1)$ -rangiger Teilmodul von α enthält ein Rechtsideal $\neq 0$. Dieser Bedingung genügende α heißen Frobeniussche Algebren. Für Frobeniussche Algebren stimmen die \mathfrak{B}_ν mit den \mathfrak{U}_ν überein, aber nicht notwendig der Reihe nach und es braucht nicht $c_{\nu\lambda} = c_{\lambda\nu}$ sein. Dafür ist die schärfere Bedingung der Symmetrie hinreichend: es soll eine symmetrische reguläre Matrix T mit $T^{-1} \mathfrak{R} T = \mathfrak{S}$ geben. Oder: Es gibt in α einen $(n-1)$ -rangigen Teilmodul, der alle $\alpha\beta - \beta\alpha$, aber kein Rechtsideal $\neq 0$ enthält. Dann ist auch $c_{\nu\lambda} = c_{\lambda\nu}$. Beispiele symmetrischer Algebren sind die halbeinfachen Algebren und die Gruppenringe endlicher Gruppen, auch für in der Gruppenordnung aufgehende Charakteristik des Grundkörpers K . Deuring.

Nakayama, Tadasi, and Cecil Nesbitt: Note on symmetric algebras. Ann. of Math., II. s. 39, 659—668 (1938).

Im vorstehenden Referat wurde als hinreichende Bedingung dafür, daß die un-

zerfällbaren Bestandteile der beiden regulären Darstellungen einer Algebra a der Reihe nach übereinstimmen, die Symmetrie angeben. Diese Bedingung ist aber nicht notwendig, als notwendige und hinreichende Bedingung wird die schwache Symmetrie erkannt: Sei in a $1 = e_1 + \dots + e_l$, $e_\nu e_\mu = 0$, $\nu \neq \mu$, $e_\nu^2 = e_\nu$ mit unzerfällbaren Linksideal $a e_\nu$. Dann soll es in a einen $(n-1)$ -rangigen Teilmodul geben, der alle $e_\nu a e_\mu \nu \neq \mu$, aber kein Rechtsideal $\neq 0$ enthält. Ist der Grundkörper K von endlichem Grad über dem Teilkörper K_0 , so ist a als Algebra über K_0 symmetrisch (schwach symmetrisch, eine Frobeniusalgebra), je nachdem das für a als Algebra über K gilt. Ist L ein Erweiterungskörper von K , so gilt: Ist a symmetrisch, so ist a_L symmetrisch. Die Umkehrung gilt wenigstens dann, wenn K mehr Elemente enthält als der Rang $(a:K)$ beträgt. a_L ist genau dann eine Frobeniusalgebra, wenn a eine ist. Wenn a_L schwach symmetrisch ist, so ist auch a schwach symmetrisch, aber die Umkehrung davon ist nicht richtig.

Deuring (Jena).

Schilling, O. F. G.: A generalization of local class field theory. Amer. J. Math. **60**, 667—704 (1938).

Die Strukturtheorie der einfachen normalen Algebren und die Klassenkörpertheorie im kleinen wird für Grundkörper k des folgenden Typus entwickelt: k ist für eine Bewertung \mathfrak{p} relativ perfekt (Ostrowski) mit einer Wertgruppe $\Gamma(k)$, die von der Gruppe der rationalen Zahlen und λ rational unabhängigen reellen Zahlen $\theta_1, \dots, \theta_\lambda$ aufgespannt wird, k und der Restklassenkörper \mathbf{k} von k nach \mathfrak{p} haben die gleiche Charakteristik χ . Die Gruppe $G^{(\chi)}(k)$ der normalen einfachen Algebrenklassen mit χ -Potenzindizes enthält, wenn \mathbf{k} für $\nu=1, 2, 3, \dots$ genau eine zyklische Erweiterung U_ν vom Grade χ^ν hat, eine Untergruppe $G_\nu^{(\chi)}(k)$, die aus allen Klassen besteht, die von den U_ν entsprechenden unverzweigten Erweiterungen U_ν von k zerfällt werden. $G_\nu^{(\chi)}(k)$ ist mit der direkten Summe von λ additiven Gruppen isomorph, die ihrerseits der Gruppe aller rationalen Zahlen mit χ -Potenzennennern modulo 1 isomorph sind. Die Gruppe $G'_\nu(k)$ der Klassen, die von unverzweigten Körpern mit zu χ primen Graden über k zerfällt werden, ist der direkten Summe von λ Gruppen isomorph, die ihrerseits der Gruppe aller rationalen Zahlen mit zu χ primen Nennern modulo 1 isomorph sind. Auch über die Struktur der vollen Algebrenklassengruppe und über die zyklische Darstellbarkeit von Klassen werden Aussagen gemacht. Für die Fälle: 1. zu jedem n gibt es eine und nur eine Erweiterung n -ten Grades U_n von \mathbf{k} , $\lambda=1$; 2. \mathbf{k} algebraisch abgeschlossen, $\lambda=2$ wird dann aus den Algebrensätzen die Klassenkörpertheorie im kleinen in Analogie zu dem zahlentheoretischen Fall hergeleitet. Beispiele von relativ perfekten Körper k mit vorgeschriebenen Wertgruppen des genannten Typus werden konstruiert.

Deuring (Jena).

Brühl, Gerhard: Definition von Primteilern im rationalen Körper dreier unabhängiger Veränderlichen. J. reine angew. Math. **179**, 69—89 (1938).

Nach dem Vorbild von H. W. E. Jung (Algebraische Flächen. Hannover 1925) werden die Primteiler eines Körpers K von 3 unabhängigen komplexen Veränderlichen x, y, z mittels der homomorphen Abbildungen von K auf einen Körper A niedrigerer Dimension definiert, und zwar genügt es, sich auf Primteiler der Dimension 2, wo A die Dimension 2 hat, zu beschränken. Eine homomorphe Abbildung und der zugehörige Primteiler heißen von der 1., 2. oder 3. Art, je nachdem der Körper der Bilder von x, y, z die Dimension 2, 1 oder 0 hat. — Es wird dann eine Übersicht über die Gesamtheit der Primteiler von K gegeben; z. B. entsprechen sich die Primteiler 1. Art und die irreduziblen Polynome in x, y, z sowie die Ausdrücke $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ gegenseitig. — Jede Funktion R aus K läßt sich eindeutig in endlich viele Primteiler 1. Art zerlegen; die Beiträge der Primteiler 2. und 3. Art zu R , deren unendlich viele in R stecken können, ergeben sich bereits aus dieser Zerlegung von R in Primteiler 1. Art.

Reichardt (Leipzig).

Suryanarayanan, K. S.: On three rational functions on a Riemann surface. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 56—67 (1938).

Die Gleichungen $F_1(x, z) = 0$ und $F_2(y, z) = 0$ mögen denselben algebraischen Funktionenkörper über dem Körper $K(z)$ definieren; dann sind also x, y, z Funktionen auf derselben Riemannschen Fläche. Ihre Grade seien l, m, n ; dann hat F_1 die Gradzahlen n und l in x und z und F_2 die Gradzahlen n und m in y und z . Die Resultante $\varphi(x, y)$ von F_1 und F_2 nach z hat die Gradzahlen mn und ln . Nun wird gezeigt: Jedem relativen Automorphismus des Körpers $K(x, z)$ über dem Körper $K(z)$ entspricht ein Faktor $\psi(x, z)$ von $\varphi(x, z)$, der die Grade l und m in x und y hat. Auch wird angegeben, unter welcher Bedingung ein solcher Faktor $\psi(x, y)$ irreduzibel ist. Ist das der Fall, so haben die durch $\psi(x, y) = 0$ und $F(x, z) = 0$ definierten algebraischen Funktionen y und z von x dieselben Verzweigungspunkte mit gleichen Ordnungen. Anwendung auf einen Satz von Poncelet über Kegelschnitte und dessen Verallgemeinerung. *van der Waerden* (Leipzig).

Zahlentheorie:

Zia-ud-Din, M.: Some more formulae for the Bernoullian numbers. Math. Student 15, 81—157 (1938).

Fortsetzung einer Arbeit in derselben Zeitschrift (dies. Zbl. 14, 102). *L. Schrutka.*

Bell, E. T.: Notes on denominators. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 41—45 (1938).

Denumerant heißt (nach Sylvester) die Anzahl der Lösungen der Gleichung $a_1 x_1 + \dots + a_r x_r = n$ in ganzen Zahlen; Bezeichnung $A(n; a_1, \dots, a_r)$ oder kurz $A(n)$. Der Denumerant ist durch die Gleichung $A(n) - \sum_{a_i} A(n - a_i) + \sum_{a_i, a_j} A(n - a_i - a_j) - \dots = 0$, nur für $n = 0$ gleich 1, eindeutig bestimmt. Hieran wird eine Darstellung durch Determinanten und eine Art Reziprozität zwischen Denumeranten mit verschiedenen Zahlengruppen a_1, \dots, a_r angefügt; schließlich noch eine Verallgemeinerung einer hierher gehörigen Identität von Jacobi. *L. Schrutka* (Wien).

Erdős, Paul: On the asymptotic density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. II. Trav. Inst. Math. Tbilissi 3, 217—223 (1938).

Die asymptotische Dichte δ_a einer Folge (a) ganzer Zahlen: $a_1 < a_2 < \dots$ sei durch $\delta_a = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{a_m \leq n} 1$ definiert. Durch elementare metrische Betrachtungen zeigt

Verf.: I. Ist δ_a die asymptotische Dichte einer Folge (a) natürlicher Zahlen; $A_0 = 0$, $A_1 < A_2 < \dots$ eine Folge (A) ganzer Zahlen; gehört zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches M , daß jedes ganze $m \geq M$ als Summe von höchstens l Summanden $\pm A_j$ darstellbar ist, wobei der absolute Betrag jedes negativen $-A_j$ kleiner als εm ist; ist schließlich δ'_a die asymptotische Dichte der Folge $(a + A)$, d. h. der Folge aller Zahlen $a_i + A_j$, so ist

$$\delta'_a \geq \delta_a + \frac{\delta_a(1 - \delta_a)}{2l}.$$

II. Es sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1 < a_2 < \dots$ eine ganzzahlige Folge (a) der asymptotischen Dichte $\delta_a \leq \frac{1}{2}$, so ist die asymptotische Dichte der Folge $(a + a)$ mindestens gleich $\frac{3}{2} \delta_a$. — II ist unverbesserbar, wie das Beispiel $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 9, \dots$ zeigt. I wendet Verf. auf eine Frage der additiven Primzahltheorie an. (I. s. dies. Zbl. 13, 150.) *A. Walfisz* (Tiflis).

Vinogradov, I. M.: Some new estimations of the analytical theory of numbers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 19, 339—340 (1938).

The author announces improvements of some of his previous estimates. The full statements are complicated, but the simplest and most fundamental forms may be quoted to indicate the nature of the improvements. In (1), (2), (3) we write

$$S_m(N) = \sum_{x=1}^N e^{2\pi i m f(x)}, \quad S'_m(N) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i m f(p)} \quad [f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x, \text{ real; } p \text{ prime};$$

$$\alpha_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s^2}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad q_s > 0, \quad -1 \leq \theta_s \leq 1, \quad Q_s = \min\left(q_s, \frac{N^{\frac{1}{q_s}}}{q_s}\right), \quad (s = 1, \dots, n);$$

and we denote by c_1, c_2, \dots positive absolute constants.

(1) $|S'_1(N)| < c_1 N(N^{-\sigma} + Q_n^{-\sigma})$, $\sigma = c_2 n^{-6} (\log n)^{-2}$ ($n > 2$).
(In the author's previous estimate σ was about 2^{-2n} ; see this Zbl. 18, 390.) (2) In his book "A new method in the analytical theory of numbers" (in Russian) the author proves, among other estimates of $S_m(N)$ for $0 < q_n < N^n$, the following: If $n \geq 14$, $N^{n-1} \leq q_n \leq N^{n-\tau}$ ($0 < \tau \leq 1$), then $|S_1(N)| < c_3 N^{1-\varrho}$, $\varrho = c_4 \tau n^{-3} \left(\log \frac{n}{\tau}\right)^{-1}$.

This is here improved for small values of τ by the omission of τ in the logarithmic factor.

(3) $|S_1(N)| < c_5 (N^{-\lambda} + Q_n^{-\lambda})$, $\lambda = c_6 n^{-6} (\log n)^{-2}$, ($s =$ one of $2, \dots, n-1$). —
(4) The number of primes $p \leq N$ for which $\text{ind}(p+k) \equiv s \pmod{m}$ is $\pi(N)/m + O\{N^{1+\varepsilon}(q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}})\}$, (q, m, k, s given; q an odd prime $m|q-1$, $1 < m \leq q-1$, $q \nmid k$).

Ingham (Cambridge).

Remak, Robert: Über die Minkowskische Reduktion der definiten quadratischen Formen. *Compositio Math.* 5, 368—391 (1938).

A properly definite quadratic form $f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ik} x_i x_k$ is Minkowski-reduced if, for $m=1$ to n , a_{mm} is the minimum value of f for integers x_i such that $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 1$ (and $a_{m, m+1} \geq 0$). Bieberbach and Schur (*S.-B. preuß. Akad. Wiss.* 1928, 510—535) showed for the determinant D of f , that $D/(a_{11} a_{22} \dots a_{nn}) \geq \bar{\lambda}_n$, where $\bar{\lambda}_n \geq (48/125)^{(n^2-n)/6}$; and that if $t = \sum_i q_i \left(\sum_k \beta_{ik} x_k\right)^2$, where $\beta_{ii} = 1$ and $\beta_{ik} = 0$

($k < i$), then $|\beta_{ik}| \leq \frac{1}{2} i! \bar{\lambda}_n^{-1}$. It is now proved that $D/(a_{11} \dots a_{nn}) \geq \lambda_n$, where $\lambda_n = \gamma_n \cdot (4/5)^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}$ if $n \geq 5$, and $\lambda_n = \gamma_n$ if $n \leq 4$. Here γ_n is a constant for which $D/a_{11}^n \geq \gamma_n$. From known expressions for γ_n , there follows $\lambda_n \geq (3/5)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. Further, if $n \geq 5$, $|\beta_{ik}| \leq \lambda_i^{-\frac{1}{2}}$. The maximum c such that $\lambda_n \geq c^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ for every $n \geq 2$, is calculated to be $c = 0,74195$.

G. Pall (Montreal).

Oppenheim, A.: The continued fractions associated with chains of quadratic forms. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 44, 323—335 (1938).

Jeder zweiseitig unendlichen Folge (g_i) ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$) natürlicher Zahlen g_i seien die unendlich vielen Kettenbrüche $F_i = [g_i, g_{i+1}, \dots]$, $H_i = [g_{i-1}, g_{i-2}, \dots]$ zugeordnet. Sei $L_i = F_i + H_i$, $M_i = F_i H_i$, $N_i = L_i \left(1 + \frac{1}{M_i}\right)$. Dann zeigt Verf. für alle i

$$\lambda_i = \max_{h=i, i+1, i+2} L_i \geq 2\alpha; \quad \mu_i = \max_{h=i, i+1, i+2} M_i \geq \alpha^2; \quad \nu_i = \max_{h=i, i+1, i+2} N_i \geq 4\alpha - 2,$$

wo $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; das Gleichheitszeichen kann nur, und dann gleichzeitig für alle i , gelten, falls $(g_i) = (1_\infty)$ ist. — Ist (g_i) verschieden von den Ausnahmefolgen (1_∞) ; $(2, 1_{2n-1}^*)$, $n = 1, 2, \dots$; $(1_\infty, 2, 1_\infty)$, so gilt für mindestens ein i ferner gleichzeitig

$$L_i > 2\alpha + 1, \quad M_i > 2\alpha + 1, \quad N_i > 2\alpha + 2.$$

Ist allgemeiner $f(F, H)$ eine symmetrische Funktion in F, H , die in der Form $u(L, M, N)$ geschrieben werden kann, wo $u(x, y, z)$ definiert ist für $2 \leq 2\sqrt{y} \leq x < y+1$, $x < z < 2x$, und die Eigenschaft $u(x', y', z') > u(x, y, z)$ für $x' > x$, $y' > y$, $z' > z$ hat, so gilt

$$\max_{h=i, i+1, i+1} f(F_h, H_h) \geq u(2\alpha, \alpha^2, 4\alpha - 2),$$

mit einem Gleichheitszeichen allein für $(g_i) = (1_\infty)$. Von den obigen Ausnahmefolgen abgesehen gilt ferner für mindestens einen Index $f(F_i, H_i) > f(\alpha + 1, \alpha)$. — Alle diese Resultate hängen eng mit der Theorie der indefiniten quadratischen Formen zusammen (siehe Bachmann, Quadratische Formen, Bd. 2). Verf. macht eine Anwendung auf folgende Frage von Mordell [*J. London Math. Soc.* 12, 34—36 (1937); dies. Zbl. 15, 390]: $y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$, $y_2 = \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2$ sind zwei gegebene reelle Linearformen der Determinante 1; was ist die obere Schranke des Produkts zweier positiven Zahlen λ_1, λ_2 , für die $|y_1| < \lambda_1$, $|y_2| < \lambda_2$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = 0$ hat? Nach Mordell kann stets $\lambda_1 \lambda_2 \geq \frac{1}{2}$, nach Szekeres [*J. London Math. Soc.* 12, 88—93

(1937); dies. Zbl. 16, 368] sogar $\lambda_1 \lambda_2 \geq \frac{1+1/\sqrt{5}}{2}$ gemacht werden, was die genaue Konstante ist. Verf. bestimmt alle Ausnahmefälle, in denen $\lambda_1 \lambda_2 \leq \frac{1+1/\sqrt{5}}{4}$ sein muß.

Mahler (Manchester).

Hofreiter, Nikolaus: Über die Kettenbruchentwicklung komplexer Zahlen und Anwendungen auf diophantische Approximationen. Mh. Math. Phys. 46, 379—383 (1938).

Verf. untersucht die Kettenbruchentwicklung $\alpha = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots$ komplexer Zahlen α nach nächsten Ganzen; dabei sind die b ganze Zahlen des Gaußschen Zahlkörpers $k(i)$, und wird angenommen, daß α nicht in $k(i)$ liegt. In Analogie zu bekannten Sätzen im Reellen wird gezeigt: 1. Die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ von α genügen den Ungleichungen

$$\frac{1}{2|q_n|(|q_n| + |q_{n+1}|)} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \frac{1}{|q_n|^2}.$$

— 2. Ist $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{4|q|^2}$, so ist $\frac{p}{q}$ gleich einem $\frac{p_n}{q_n}$. — 3. Es gibt unendlich viele $t > 0$ (nämlich $t = \sqrt{8}(|q_n| + |q_{n+1}|)$), für die $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\sqrt{2}}{|tq|}$, $1 \leq |q| \leq \frac{t\sqrt{2}}{8}$ unlösbar ist in ganzen p, q aus $k(i)$. — 4. Zu jeder noch so schnell monoton wachsenden stetigen Funktion $\psi(t) > 0$ gibt es zwei Zahlen α, β , die nicht in $k(i)$ liegen, und ferner eine Folge monoton wachsender natürlicher Zahlen r , so daß

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{r}, \quad 1 \leq |x| \leq \psi(r)$$

nicht im ganzen x, y aus $k(i)$ lösbar ist. — Vgl. J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Erg. d. Math. IV 4 (1936), Berlin: Julius Springer, Kap. III u. V.

Mahler (Manchester).

Jarnik, Vojtech: Zum Khintchineschen „Übertragungssatz“. Trav. Inst. Math. Tbilissi 3, 193—212 (1938).

Die griechischen und großen lateinischen Buchstaben mögen reelle Zahlen, die kleinen lateinischen Buchstaben ganze Zahlen bedeuten. Ein System $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ von s Zahlen heiße eigentlich, wenn aus $x_1\theta_1 + \dots + x_s\theta_s + x_0 = 0$ folgt $x_1 = \dots = x_s = x_0 = 0$. Für $\tau \geq 1$ sei

$$\psi_1(\tau) = \psi_1(\tau, \theta_1, \dots, \theta_s) = \min_{\substack{0 < \max_{1 \leq i \leq s} |x_i| \leq \tau}} |x_1\theta_1 + \dots + x_s\theta_s + x_0|,$$

$$\psi_2(\tau) = \psi_2(\tau, \theta_1, \dots, \theta_s) = \min_{0 < q \leq \tau} \left(\max_{1 \leq i \leq s} |q\theta_i - p_i| \right).$$

Die von $\theta_1, \dots, \theta_s$ abhängigen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \beta, \alpha$ werden so erklärt (der limsup ist in allen Formeln auf $\tau = \infty$ bezogen): γ_1 ist die obere Grenze der λ mit $\limsup \psi_1(\tau) \tau^{s+\lambda} < \infty$;

γ_2 die obere Grenze der λ mit $\limsup \psi_2(\tau) \tau^{\frac{1+\lambda}{s}} < \infty$; $\beta = \gamma_1 + s$, $\alpha = 1 - \frac{1+\gamma_2}{s}$.

Anders ausgedrückt: β ist die obere Grenze der λ mit $\psi_1(\tau) = O(\tau^{-\lambda})$; α die untere Grenze der λ mit $\psi_2(\tau) = O(\tau^{\lambda-1})$. Durch elementare metrische Betrachtungen beweist Verf. die folgenden Sätze: I. $\beta(\theta_1, \theta_2) = 1/\alpha(\theta_1, \theta_2)$ für eigentliche Systeme. II. Es sei $s = 2$; $\{\theta_1, \theta_2\}$ ein eigentliches System; $0 < K < \infty$. Für $\tau \geq \mu$ sei $\varphi_1(\tau)$ stetig, $\tau^{-1}\varphi_1(\tau)$ wachsend, $\varphi_1(\tau) \geq \tau^2$. Es sei $\varphi_2(\tau)$ die zu $\varphi_1(\tau)$ inverse Funktion. Aus $\limsup \varphi_1(\tau) \psi_1(\tau) < K$ folgt dann $\limsup \tau \psi_2(\tau)/\varphi_2(\tau K) \leq 12(1+K)$; aus $\limsup \tau \psi_2(\tau)/\varphi_2(\tau) < K$ folgt $\limsup \varphi_1(\tau/2K) \psi_1(\tau) \leq 4(1+K)$. Es gebe ein $m > 0$, so daß $\tau^{-m}\varphi_1(\tau)$ abnimmt. Dann ist $\psi_1(\tau) = O(1/\varphi_1(\tau))$ bzw. $\psi_1(\tau) = o(1/\varphi_1(\tau))$ dann und nur dann, wenn $\psi_2(\tau) = O(\varphi_2(\tau)/\tau)$ bzw. $\psi_2(\tau) = o(\varphi_2(\tau)/\tau)$ ist. III. Es sei $s > 2$; $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ ein eigentliches System. Dann ist

$$\beta \geq (s-1) + s(1-\alpha), \quad \alpha \leq \frac{s-2}{s-1} + \frac{s}{s-1} \frac{1}{(s-1)\beta + s}.$$

Für $\alpha < \frac{1}{s}$ ist sogar $\beta \geq s - 2 + \frac{1}{\alpha}$, und für $\beta > s(2s - 3)$ ist sogar $\alpha \leq \frac{s-2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)(\beta-2s+4)}$. IV. Es sei $s > 2$. Dann gibt es zwei eigentliche Systeme $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$, $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ mit $\beta(\eta_1, \dots, \eta_s) = \beta(\theta_1, \dots, \theta_s) = \infty$, $\alpha(\theta_1, \dots, \theta_s) = \frac{s-2}{s-1}$, $\alpha(\eta_1, \dots, \eta_s) = 0$. V. Es sei $s > 1$, $\varphi(\tau) \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow \infty$. Dann gibt es ein eigentliches System $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ mit $\psi_2(\tau, \eta_1, \dots, \eta_s) = o(\varphi(\tau)/\tau)$. VI. Es sei $s > 2$, θ_1 irrational. Für fast alle

Systeme $\{\theta_1, \dots, \theta_{s-1}\}$ ist dann $\psi_2(\tau, \theta_1, \dots, \theta_{s-1}) = \Omega\left(\tau^{-\frac{1}{s-1}}\right)$. [Fast alle heißt hier, daß im $s-1$ -dimensionalen Raume die Punkte $(\theta_1, \dots, \theta_{s-1})$, welche jene Ω -Beziehung nicht erfüllen, eine Nullmenge bilden.] VII. Es sei $s > 1$, $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ ein eigentliches System, $0 < K < \infty$, $\varphi_2(\tau)$ für $\tau \geq \lambda$ stetig und wachsend, $\tau^{-1}\varphi_2(\tau)$ nicht wachsend, $\varphi_2(\tau) \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow \infty$, $\limsup \tau \varphi_2(\tau)/\varphi_2(\tau) < K$; $\varphi_1(\tau)$ die zu $\varphi_2(\tau)$ inverse Funktion. Dann ist $\limsup \tau^{2s-1} \varphi_1(\tau)/\varphi_2(\tau^s) \leq s^2 K$; ist $\varphi_2(\tau) \leq \tau^{\frac{1}{s}}$ für alle $\tau \geq \lambda$, so ist $\limsup \tau^{s-2} \varphi_1(\tau/2K) \varphi_1(\tau) \leq s^2(1+K)$. VIII. Es sei $s > 1$, $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ ein eigentliches System, $0 < K < \infty$; $\varphi_1(\tau)$ für $\tau \geq \mu$ stetig, positiv und wachsend, $\varphi_1(\tau) \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow \infty$, $\limsup \varphi_1(\tau) \varphi_1(\tau) < K$. Dann ist

$$\limsup \left(\frac{\tau}{\varphi\left(\tau K^{\frac{s-1}{s}}\right)} \right)^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau) \leq 3s^2(1+K),$$

wo $\varphi(\tau)$ die zu $\tau \varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(\tau)$ inverse Funktion ist; ist $\varphi_1(\tau) \tau^{-2s}$ wachsend, $\varphi_1(\tau) \geq \tau^{s(2s-3)}$ für $\tau \geq \mu$, so ist

$$\limsup \left(\frac{\tau}{\varphi_2(\tau K)} \right)^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau) \leq 3s^2(1+K),$$

wo $\varphi_2(\tau)$ die zu $\varphi_1(\tau) \tau^{-2s+1}$ inverse Funktion ist. IX. $\{\theta_1, \theta_2\}$ ist dann und nur dann ein eigentliches System, wenn $\limsup \tau \psi_2(\tau, \theta_1, \theta_2) = \infty$ ist. — Hierbei sind I, II, III in VII + VIII enthalten, IV in V + VI, IX in II. V stammt von Khintchine und wird hier besonders einfach bewiesen. A. Walfisz (Tiflis).

Gruppentheorie.

Dresher, Melvin, and Oystein Ore: Theory of multigroups. Amer. J. Math. 60, 705—733 (1938).

Eine Multigruppe ist eine Menge M von Elementen, für die eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften erklärt ist: 1. das Produkt zweier Elemente in M ist eine Teilmenge von M ; 2. die durch die Multiplikation der Elemente in M induzierte Multiplikation der Teilmengen von M ist assoziativ; 3. zu irgend zwei Elementen a und b in M gibt es Elemente x und y , so daß b in ax und in ya enthalten ist. — Das Element s ist ein Linksskalar, wenn sx für alle x in M eine einelementige Menge ist. Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß die Linksskalare eine Gruppe im üblichen Sinne bilden; unter schärferen Annahmen gilt, daß die Linksskalare gleichzeitig Rechts-skalare sind. — Man kann die Multigruppe M in Restklassen nach der Teilmenge A von M zerlegen, und diese Restklassen bilden hinsichtlich der natürlichen Multiplikation wieder eine Multigruppe, wenn nur A (und M) genügend viele Annahmen folgender Art erfüllt: a) A enthält mit den Elementen a und b auch ab und alle Elemente x und y , so daß xa und ay das Element b enthalten; (b) sind u und v Elemente in M , und gibt es in A ein Element α , so daß v in au (bzw. ua) enthalten ist, so gibt es in A ein Element α' , so daß u in $\alpha'v$ (bzw. $v\alpha'$) enthalten ist; auch der Zusammenhang zwischen Restklassenmultigruppen und Homomorphismen läßt sich dann bei geeigneter Fassung des Homomorphismusbegriffs in üblicher Weise herstellen. — Eine Untermultigruppe A von M , die hinreichend viele der obengenannten Eigenschaften erfüllt, heißt normal, wenn $A_m = {}_m A$ für jedes m in M gilt; für diese normalen Untermultigruppen kann man

dann in üblicher Weise den Jordan-Höderschen Kompositionsreihensatz und den Schreierschen Verfeinerungssatz (nach Zassenhaus) herleiten. — Die Untergruppen A derart, daß die Restklassenmultigruppe sogar eine Gruppe im üblichen Sinne ist, lassen sich durch die Eigenschaft $A = {}_m A_{m-1}$ für alle m in M und alle möglichen Inversen m^{-1} von m in M charakterisieren. — Es ist bemerkenswert, daß eine eindeutig bestimmte kleinste Untermultigruppe existiert, modulo derer M eine Gruppe ist.

Reinhold Baer (Urbana, Ill., U. S. A.).

Koliankowsky, D.: Sur un théorème de O. Schmidt. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 19, 343—345 (1938).

Beweis des Satzes: Wenn eine endliche Gruppe G nur eine einzige Klasse konjugierter Untergruppen enthält, die nicht direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind, so ist G auflösbar. Als Hilfssatz wird gezeigt: Ist P eine Sylowgruppe von G , und D eine von 1 und P verschiedene Untergruppe von P , die Durchschnitt von P und einer anderen Sylowgruppe von G ist und eine möglichst große Ordnung besitzt, so ist der Normalisator von D in G nicht das direkte Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Easterfield, T. E.: An extension of a theorem of Kulakoff. Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 316—320 (1938).

Es sei G eine endliche Gruppe und P eine Sylowgruppe der Ordnung p^l von G . Wie P. Hall [Proc. London Math. Soc. (2) 40, 468—501 (1936); vgl. dies. Zbl. 15, 202] unter Verallgemeinerung des „Satzes von Kulakoff“ (vgl. dies. Zbl. 1, 386) gezeigt hat, gelten eine Reihe von Sätzen über die Anzahlen der Untergruppen von bestimmtem Typ und der Ordnung p^k ($k \leq l$) von G , falls die Primzahl $p > 2$ ist. Der Autor beweist nun Ergänzungen zu den Hallschen Sätzen für den Fall $p = 2$; hierbei spielen gewisse „Ausnahmetypen“ von Gruppen der Ordnung 2^l eine Sonderrolle, nämlich außer den zyklischen Gruppen noch die Gruppen mit 2 Erzeugenden A, B und den definierenden Relationen $A^{2^m} = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}$ ($m = 2^{l-2}, l \geq 3$) oder $A^{2^m} = 1, B^2 = A^m, B^{-1}AB = A^{-1}$ ($m = 2^{l-2}, l \geq 3$) oder $A^{2^m} = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{m-1}$ ($m = 2^{l-2}, l \geq 4$). Unter anderem gilt dann: Ist die zur Primzahl 2 gehörige Sylowgruppe I von G der Ordnung 2^l kein Ausnahmetyp, so ist für $0 < k < l$ die Anzahl der Untergruppen der Ordnung 2^k von G kongruent 3 mod. 4.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Tschebotaröw, N.: Über irreguläre Darstellungen von halbeinfachen Lieschen Gruppen. Compositio Math. 6, 103—117 (1938).

Eine infinitesimale Transformation einer halbeinfachen Lieschen Gruppe heiße regulär, wenn das zugehörige charakteristische (Killingsche) Polynom möglichst viele verschiedene Wurzeln hat. Eine Untergruppe G_1 heißt regulär, wenn sie einen regulären Operator enthält. Nun wird gezeigt: Zu jeder irregulären Untergruppe G_0 von der Ordnung r_0 gibt es eine reguläre echte Untergruppe G_1 von einer Ordnung $r_1 \geq r_0$. An einem Beispiel wird gezeigt, daß man nicht immer $G_1 \supset G_0$ erreichen kann. Aus dem Ergebnis folgt, daß man sich bei der Suche nach Untergruppen von maximaler Ordnung (oder, was auf dasselbe hinauskommt, bei der Suche nach Darstellungen durch Transformationen eines Raumes von möglichst kleiner Dimension) auf reguläre Untergruppen beschränken kann, wie es Cartan in seiner These getan hat.

van der Waerden (Leipzig).

Analysis.

Bruwier, L.: Sur l'identité d'Euler relative aux fonctions homogènes. C. R. Soc. Sci. Varsovie 31, 21—24 (1938).

Für homogene Funktionen in n Veränderlichen wird unter schwachen Voraussetzungen über Differenzierbarkeit die Eulersche Identität bewiesen.

Rellich.

Tehélidzé, W.: Sur l'intégrale curviligne. Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 1—10 (1938).

P_1 Notwendige Bedingungen für die Unabhängigkeit eines Kurvenintegrals der Form $\int F[x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)] dx$ vom Wege. (Vgl. hierzu D. Tondze, dies. Zbl. 4, 353.)
 P_1 Rogosinski (Cambridge).

Kershner, Richard: Determination of a van der Corput absolute constant. Amer. J. Math. 60, 549—554 (1938).

In einem endlichen Intervall $[a, b]$ sei $f(x)$ reell, $f''(x)$ vorhanden und $\geq r$, wo r positiv und von α unabhängig ist. Dann gibt es nach van der Corput und Landau numerische Konstanten μ und ν , so daß

$$\left| \int_a^b \exp\{i f(x)\} dx \right| \leq \mu r^{-1/2}, \quad \left| \int_a^b \cos f(x) dx \right| \leq \nu r^{-1/2}.$$

μ_0, ν_0 seien die kleinsten zulässigen Werte von μ, ν . — In der ersten gleichnamigen Arbeit hat Verf. ν_0 bestimmt [s. dies. Zbl. 12, 348; diesem Referat möchte ich nachtragen, daß ν_0 bereits von Landau, und zwar besonders einfach, bestimmt worden ist: vgl. E. Landau, „Über eine Integralungleichung“, Christiaan Huygens 1 (1922), 3 S.]. In der vorliegenden Arbeit wird in wenigen Zeilen gezeigt, daß $\mu_0 = \nu_0$ ist, und sodann μ_0 durch ein rein geometrisches, sehr umständliches Verfahren ermittelt. A. Walfisz.

Boas jr., R. P., and S. Bochner: Closure theorems for translations. Ann. of Math., II. s. 39, 287—300 (1938).

Let $p(t)$ be a positive continuous function, decreasing as $t \rightarrow \pm \infty$, such that $p(t)/p(2t)$ is uniformly bounded and $|t|^{-n} = O[p(t)]$ as $|t| \rightarrow \infty$ for some integer $n \geq 0$. Let the set $D_{p(t)}$ of all complex-valued functions $g(t)$, continuous except for discontinuities of the first kind, such that $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} p(t)g(t)$ exists, be metrised by means of the norm $\|g(t)\| = \max_{-\infty \leq t \leq \infty} p(t)|g(t)|$. Every such function $g(t)$ has a generalized Fourier transform in Bochner's sense of order $n+2$, $\gamma(t)$ say. The authors show that equivalence of the statements: (1) There is no interval in which $\gamma(t)$ is equal to a polynomial of degree at most $n+1$. (2) For any continuous function $f(t)$ with $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} p(t)f(t) = 0$, and for any $\varepsilon > 0$, there exist real numbers λ_j , complex numbers A_j , and an integer k , such that

$$\max_{-\infty \leq t \leq \infty} p(t) \left| f(t) - \sum_{j=1}^k A_j g(t + \lambda_j) \right| < \varepsilon.$$

Special case of periodic functions $g(t)$. Extension to sequences.

E. Hille.

Pitt, H. R.: General Tauberian theorems. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 243—288 (1938).

N. Wiener's general theory of Tauberian theorems is here carried an important stage further and its scope extended to include parts of the subject (such as the 'high indices theorem' of Hardy and Littlewood) which were imperfectly connected with the general theory. One of Wiener's fundamental theorems is the following. Suppose

$$(1) \quad k(x) \in L(-\infty, \infty),$$

$$(2) \quad K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{-\omega x} dx \neq 0 \quad (\omega = it, t \text{ real}),$$

$$(3) \quad s(x) \text{ (assumed measurable) is bounded in } (-\infty, \infty),$$

$$(4) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)s(y)dy \rightarrow A \int_{-\infty}^{\infty} k(y)dy \text{ as } x \rightarrow \infty;$$

then (C) the relation (4) holds with any k^* of $L(-\infty, \infty)$ in place of k . In the usual applications the 'Tauberian conditions' of the particular problem are used first in the verification of (3) and finally in the passage from (C) to (C)' $s(x) \rightarrow A$ as $x \rightarrow \infty$, the conclusion actually wanted. In the present paper the stronger conclusion (C)' is embodied in the general theorems by the introduction of additional (Tauberian) conditions

on $s(x)$. The author introduces a class T of functions (a wide generalisation of R. Schmidt's 'slowly decreasing functions'), together with some associated classes, and shows that (C)' can be secured by adding the condition (3a) $s(x) \in T$. With this form of the theorem, however, it is still necessary to verify the condition (3) separately in each application, and this may be very difficult (as in the high indices theorem). The author therefore seeks to replace (3) by other conditions easier to verify in particular cases. He shows that the (new) theorem remains true if (1), (2), (3) are replaced by (1)' $k(x)e^{-\sigma x} \in L(-\infty, \infty)$ for $0 \leq \sigma \leq \sigma_2$, (2)' $K(\omega) \neq 0$ for $\omega = \sigma + it$, $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, t real, $(0 \leq \sigma_1 < \sigma_2)$, (3. 1)' $s(x) = 0$ ($x \leq 0$), $s(x) = O(e^{\sigma x})$ ($x > 0$) for each σ in $\sigma_1 < \sigma \leq \sigma_2$, (3. 2)' $g(x)$ is bounded in $(-\infty, \infty)$. The boundedness of $s(x)$ in $(-\infty, \infty)$ is now deduced from (1)', (2)', (3)' and (3a) by a Fourier transform argument combined with a 'maximum term argument', and this is naturally one of the most difficult parts of the proof. Applied to the Dirichlet's series $f(s) = \sum e^{-\lambda_n s}$ this theorem yields a comprehensive result which not only extends the known theorems with conditions on a_n but includes also the high indices theorem [i. e. the theorem that if $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq c > 1$, the series is convergent for $s > 0$, and $f(s) \rightarrow A$ as $s \rightarrow +0$, then the series is convergent (to A) for $s = 0$].—The general theorems are extended in various other directions. Thus the results are usually stated as 'oscillation theorems', i. e. as inequalities between $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x)$, the condition (4) being omitted. Further the conditions (2) and (2)' are imposed only for $-\pi/\lambda \leq t \leq \pi/\lambda$ and the conclusions correspondingly weakened [in such a way, however, as to yield original theorems when $\lambda \rightarrow +0$ (as in the well known theorems of Heilbronn and Landau for Dirichlet's series; see Math. Z. 37, 10—16, this Zbl. 6, 196)]. Finally the theory is not strictly confined to kernels $k(x - y)$ but extended to others $k(x, y)$ which approximate to these in a certain sense. The paper concludes with applications to Abel, Borel, and Hausdorff summation.

Ingham (Cambridge).

Pitt, H. R.: An extension of Wiener's general Tauberian theorem. Amer. J. Math. 60, 532—534 (1938).

A particular case of one of the theorems referred to in the preceding review may be stated (in the notation used there) as follows. Suppose (1) $k(x) \in L(-\infty, \infty)$, (2) $K(it) \neq 0$ (t real), (3) $\text{bd}_{-\infty < x < \infty} |s(x)| < \infty$, (3a) $\lim_{x \rightarrow \infty} |s(x + \varepsilon) - s(x)| = \delta(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \delta(\varepsilon) = 0$; then $\lim_{x \rightarrow \infty} |s(x)| \leq C_1 + C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)|$, where C_1 is an arbitrary positive constant and C_2 a positive constant depending only on C_1 , $k(x)$ and $\delta(\varepsilon)$. This is here generalised by replacing $\lim_{x \rightarrow \infty}$ and $\text{bd}_{-\infty < x < \infty}$ by a pair of general 'metrics' satisfying certain axioms.

Ingham (Cambridge).

Trjitzinsky, W. J.: Theory of non-linear q -difference systems. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 17, 59—106 (1938).

The object of this paper is a study of the properties of the following system of non-linear q -difference equations:

$$(A) \quad x^{p/s} y_j(qx) = a_j(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

where $|q| \neq 1$, p and s are positive integers, and

$$a_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = l_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) + q_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)),$$

$$l_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = \sum_{m=1}^n l_{m,j}(x) y_m(x),$$

$$q_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = \sum j a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j(x) y_1^{i_1}(x) y_2^{i_2}(x) \dots y_n^{i_n}(x),$$

$$i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0, \quad i_1 + \dots + i_n \geq 2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

The functions $l_{m,j}(x)$ and $j a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j(x)$ are analytic $z = x^{1/s}$ at $z = 0$ for $|z| \leq r_1$, ($r_1 > 0$). — The problem is analogous to those treated elsewhere by the author in the fields of non-linear difference and differential equations (see this Zbl. 17, 301

and 309). The discussion is made to depend upon the linear problem

$$(LA) \quad x^{p/q} y_i(qx) = l_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)).$$

The transformation:

$$q = |q| e^{\sqrt{-1}q}, \quad x = x^t \log q, \quad t = u + \sqrt{-1}v,$$

is employed to simplify the discussions of both (A) and (LA). In terms of the new variables a region W is defined as that part of a half plane bounded on the right by a certain line $\text{arc} q v = u \log |q| - \log r$, and above and below by the rays T_1 and T_2 from $t = 0$ (or lines parallel to them) with slopes equal respectively to $(-\text{arc} q + |\log q|)/(\log |q|)$ and $(-\text{arc} q - |\log q|)/(\log |q|)$. The existence properties of the solution of the system are then associated with that part of W on and above the line $v = -c$, $c > 0$. — Formal and "actual" solutions of the system are obtained, the "actual" solutions being defined as those formal solutions which converge in the region described above.

H. T. Davis (Evanston/Illinois).

Approximation von Funktionen. Orthogonalentwicklungen:

Germansky, Boris: Sur les systèmes de points de Fekete d'un arc de cercle. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1163—1166 (1938).

This Note (it contains many gaps and obscurities, obligingly — but not fully — covered by the author in a written communication to the Editor of this Zbl. Ref.) deals with "systems of Fekete's points" (Syst. F), of order n , for an arc A of the unit-circle, of opening α ($0 < \alpha < 2\pi$), with $n \geq [2\pi/2\pi - \alpha]$. "Syst. F ", of order n , for a bounded closed set E , means a set of n points z_1, z_2, \dots, z_n on E maximizing $\sqrt[n]{\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} |z_\mu - z_\nu|}$. The author shows that under the conditions stated there

exists a unique Syst. F on A containing necessarily its two end-points. A linear differential equation of second order is derived (in the classical manner) for $p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ (z_i the desired points). This involves c_1 for which an algebraic equation of degree $n - 1$ is indicated. The nature of its solutions and their relations to the problem under discussion is sketched. Shohat.

Sewell, W. E.: Degree of approximation by polynomials in z and $1/z$. Duke math. J. **4**, 393—400 (1938).

The paper considers "polynomials in z and $\frac{1}{z}$ "

$$r_n(z) = a_{-n} z^{-n} + a_{-n+1} z^{-n+1} + \dots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + \dots + a_n z^n.$$

The first problem studied is: given $|r_n(z)| \leq M$ on a properly characterized curve C , find an upper bound for the generalized derivative $|r_n^{(\alpha)}(z)|$ on C . The second problem studied is that of the degree of approximation, by means of $r_n(z)$, of certain classes of functions defined on C . The main tools are: conformal mapping and known results from the Theory of Approximation in the real and complex domain. J. Shohat.

Erdős, P., and G. Grünwald: Note on an elementary problem of interpolation. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 515—518 (1938).

On sait que le polynôme d'ordre $n - 1$ admettant dans les points $x_k = x_k^{(n)}$ $= \cos(2k - 1)\pi/2^n$ les valeurs y_k peut-être écrit sous la forme

$$\sum_1^n y_k l_k^{(n)}(x).$$

Les polynômes $l_k^{(n)}$ sont les polynômes fondamentaux de l'interpolation. Les auteurs démontrent que l'on a

$$|l_k^{(n)}(x)| < \frac{4}{\pi}$$

que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Marcinkiewicz (Wilno).

Ciorănescu, Nicolas: Sur les coefficients harmoniques d'une fonction analytique de deux variables réelles. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **39**, 63—70 (1937).

Im Anschluss an seine frühere Arbeit (dies. Zbl. **17**, 123) gibt der Verf. die folgende Formel für die Entwicklung einer analytischen Funktion $f(x, y)$ von zwei reellen Veränderlichen x, y : es ist $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 + y^2)^n u_n(x, y)$, wo $u_n(x, y)$ harmonische Funktionen sind. Man erhält für die u_n die Formel

$$u_n(x, y) + u_n(0, 0) = \operatorname{Re} z^{-n} 2^{-2n+1} [n! (n-1)!]^{-1} \int_0^z (z - \xi) \left\{ [\Delta^n f(x, y)]_{x=\frac{\xi}{2}, y=\frac{\xi}{2i}} \right\} d\xi$$

$$\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2.$$

Stefan Bergmann (Czestochowa [Polen]).

Reihen:

Denjoy, Arnaud: Sur la convergence des séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 210—213 (1938).

Si la série (*) $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ converge en moyenne absolue vers la somme s [c'est-à-dire si $|s_0 - s| + |s_1 - s| + \dots + |s_n - s| = o(n)$ pour $n \rightarrow \infty$, où $s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$] alors la série (*) est sommable par le procédé de Riemann vers s , c'est-à-dire que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin n h}{n h} \right)^2 \right\} = s.$$

L'auteur donne aussi une démonstration du théorème bien connu de Hardy et Littlewood, d'après lequel en tout point θ où $\int_0^u [f(\theta + t) - f(t)]^2 dt = o(u)$ ($f \in L^2$) la série de Fourier de f converge vers $f(\theta)$ en moyenne absolue. A. Zygmund (Wilno).

Denjoy, Arnaud: Sur la convergence des séries trigonométriques. C. r. Acad. Sci., Paris **207**, 316—318 (1938).

On sait que si $s_n(x)$ désigne la n -ième somme partielle de la série de Fourier de la fonction $f(x) \in L^2$, alors pour presque tout x la suite des indices n_r tels que $|s_{n_r}(x) - f(x)| > \alpha$ possède la propriété: $\sum 1/n_r < \infty$ (quelque petit que soit $\alpha > 0$) (voir Zygmund, Trigonometrical series, p. 257). L'auteur montre que (I) même dans le cas de la fonction f continue, cette proposition tombe en défaut dans des points individuels. (II) Si la série $\sum c_n$ converge en moyenne absolue (cf. la note précédente) et si $\sum c_n^2 < \infty$, la somme partielle S_n de la série $\sum c_r$ admet la limitation $S_n = o(n^{1/4})$, qui ne peut pas être améliorée. A. Zygmund (Wilno).

Smith, A. H.: Summability of conjugate Fourier series. Duke math. J. **4**, 270—276 (1938).

A series $\sum a_\nu$ is said to be summable (α, β) to sum S (see Bosanquet and Linfoot, this Zbl. **2**, 388), if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu < n} \left[B \left(1 - \frac{\nu}{n} \right)^\alpha \log^{-\beta} \left(\frac{C}{1 - \nu/n} \right) \right] = S, \text{ where } B = (\log C)^\beta.$$

Bosanquet and Linfoot applied (loc. cit.) this method to the study of Fourier series and of the conjugate series. The purpose of the present paper is to obtain further results for the conjugate series. For example, if

$$f(x) \in L, \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad \Psi_x(t) = \int_0^t [f(x+u) - f(x-u)] du,$$

then the series $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)$ is summable $(1, 1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) to the sum

$$- \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\infty} t^{-2} \Psi_x(t) dt \text{ at every point } x \text{ where this limit exists and where } \Psi_x(t) = O(t) \text{ as } t \rightarrow 0.$$

A. Zygmund (Wilno).

Cesari, Lamberto: Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 105—116 (1938).

L'au. donne quelques théorèmes pour la convergence et la sommabilité (C) des séries trigonométriques (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. a) Si $a_n \rightarrow 0$; $b_n \rightarrow 0$ et pour un $p \geq 0$ entier, et un $r \geq 0$ entier on a (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{p+r+1} a_n| n^p < \infty$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{p+r+1} b_n| n^p < \infty$, la série (1) converge uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, vers une fonction qui est p -fois dérivable. b) Si $\Delta^{r+1} a_n \rightarrow 0$, $\Delta^{r+1} b_n \rightarrow 0$ et (2) et (3) sont satisfaites la série (1) est uniformément (C, $r+1$) sommable dans $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ vers une fonction $f(x)$, dont les dérivées $f^{(s)}(x)$, $s=1, 2, \dots, p$ sont continues. Le réf. remarque que le théorème a) était démontré par lui dans le cas $p=0$, comme le théorème b) dans le même cas sous une forme plus générale [Obrechhoff, Jber. Deutsch. Math.-Ver. einig. 33, 125—127 (1924); Compt. Rend. 186, 356 (1928)]. N. Obrechhoff (Sofia).

Karamata, Jovan: Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande. Math. Z. 44, 156—160 (1938).

Beweis der folgenden Sätze: 1. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ in $|z| < 1$ konvergent und $f(z)$ in $\mathfrak{R}: |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ beschränkt. Damit die Potenzreihe in $z=1$ zum Wert s Borel-limitierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Fourierreihe von $f(z)$ auf \mathfrak{R} in $z=1$ zu s konvergiert, d. h.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\frac{1}{1+it}\right) \frac{\sin \omega t}{t} dt \rightarrow s, \quad \text{wenn} \quad \omega \rightarrow \infty.$$

2. Ist $f_k(z) \equiv (1-z)^k f(z)$ in \mathfrak{R} stetig und $f_k(z) \rightarrow A$ falls $z \rightarrow 1$ in \mathfrak{R} , so ist

$$e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!} \sim \frac{A \omega^k}{\Gamma(k+1)}, \quad \omega \rightarrow \infty \quad (k > 0).$$

3. Ist $f(z)$ in \mathfrak{R} stetig, so sind die Cesàromittel k -ter Ordnung ($k > 0$) der Potenzreihe in $z=1$ B-limitierbar.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Spezielle Funktionen:

Varma, R. S.: On Laguerre polynomials which are self-reciprocal in the Hankel transform. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 54—55 (1938).

Verf. geht aus von einem unendlichen Integraalausdruck, dessen Integrand das Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion, einer Besselschen Funktion erster Art und einer Weberschen Funktion ist, wobei das Ergebnis ein Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion und einer Weberschen Funktion gleicher Ordnung wie unter dem Integranden ist. Verf. drückt dies so aus, daß das besagte Produkt im Ergebnis des Integrals Selbstreziprok in der Hankelschen Transformation ist. Er zeigt nun in dieser Arbeit, daß für das Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion und einer Laguerreschen Funktion eine analoge Selbstreziprozität gilt. Beim Beweis macht er davon Gebrauch, daß eine Laguerresche Funktion ein Sonderfall einer konfluenten hypergeometrischen Funktion, multipliziert mit einer Potenz und einer Exponentialfunktion ist. Zum Schluß zeigt er, daß die früheren Ergebnisse Sonderfälle der jetzigen sind.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Erdélyi, Artur: Über eine erzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome. Math. Z. 44, 201—211 (1938).

Let $K(x_1, \dots, x_n) = K(x)$ be a non-singular quadratic form generating the "Hermite polynomials" $H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) = H_m(x)$ by the formula

$$\sum \frac{h_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{h_n^{m_n}}{m_n!} H_m(x) = e^{h_1 \xi_1 + \dots + h_n \xi_n - \frac{1}{2} K(h)}, \quad (1)$$

where $2\xi_r = \partial k / \partial x_r$. The following identity is derived:

$$\sum \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{t_n^{m_n}}{m_n!} H_m(x) H_m(y) \\ = (t_1 \dots t_n)^{-1} (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/2} \exp\{\frac{1}{2} L_1(\xi + \eta, \xi + \eta) - \frac{1}{2} L_2(\xi - \eta, \xi - \eta)\}, \quad (2)$$

provided t_r are sufficiently small; here Δ_1 and Δ_2 are the determinants of the forms

$$\sum_{r=1}^n t_r^{-1} x_r^2 \pm K(x), \text{ and } L_1, L_2 \text{ denote the corresponding reciprocal forms. This remark-}$$

able formula is a generalization of a classical result of Mehler ($n=1$) reconsidered recently by several authors. For $n=2$ it was found by Koschmieder (Math. Z. 43, 248; this Zbl. 17, 350). Defining as usual the associated polynomials $G_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) = G_m(x)$ by a formula similar to (1) (involving K^{-1} instead of K) a generating function of the type (2) for the products $H_m(x) G_m(y)$ instead of $H_m(x) H_m(y)$, can also be calculated in terms of elementary functions. *G. Szegő.*

Feldheim, Ervin: Polynomes d'Hermite et inversion des transformations de Gauss et de Laplace. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 121—129 (1938).

Starting from a classical formula which the author writes in the form

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{a}} H_n(x + it) dt = \sqrt{a\pi} (i\sqrt{a-1})^n H_n\left(\frac{t}{\sqrt{a-1}}\right),$$

he indicates the possibility of inverting the transformations of Fourier, Gauss, and Laplace with the aid of Hermitian series as well as determining the characteristic functions of these transformations. The formal results are scarcely new; the range of validity of the inversion formulas is not clearly stated and the proofs are open to very serious objections. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Amerio, Luigi: Trasformate di Laplace con infiniti zeri tendenti all'infinito sul semiasse reale positivo. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 78—84 (1938).

The author determines the Laplace transform of the functions $t^{r-1} \cos \frac{\alpha}{t}$ and $t^{r-1} \sin \frac{\alpha}{t}$ in terms of Bessel functions. In particular he finds that the Laplace transform of $t^{-1/2} \sin \frac{\alpha}{t}$ equals $\sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\sqrt{2\alpha z}} \sin \sqrt{2\alpha z}$. As a consequence he finds that the function $x^{-1} [\log 1/x]^{-1/2} \sin[\pi^2/2 \log x]$ is orthogonal to all the powers x^n , $n=1, 2, 3, \dots$ on the interval $(0, 1)$. [The existence of such functions is of course well known and explicit examples have long been in the literature, cf. T. Carleman, Ark. Mat. Astron. Fys. 17, Nr. 9 (1922/23).] *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Mohan, Brij, and R. V. Shastri: An inversion formula. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 46—48 (1938).

Die Verff. beweisen: Ist $0 < \mu \leq 1$, das Integral $\int_a^b |\Phi(w)| dw$ konvergent, und wird $f(s)$ definiert durch

$$f(s) = \int_a^b \frac{\sin \mu(w-s)}{w-s} \Phi(w) dw,$$

so gilt

$$\int_s^\infty \int_{-\infty}^\infty \{J_{\lambda+1}(x-s) J_{\lambda-1}(x-t) + J_\lambda(x-s) J_\lambda(x-t) \\ + J_\nu(x-s) J_\nu(x-t) + J_{\nu-1}(x-s) J_{\nu+1}(x-t)\} f(t) dt = 4 f(s).$$

C. S. Meijer (Groningen).

Fubini, Guido: Una lezione sulla riduzione di un differenziale ellittico reale a forma canonica con una trasformazione reale. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 65—75 (1938).

Durchführung der Reduktion elliptischer Differentiale auf einfachste Weise.

Wilhelm Maier (Greifswald).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Guigue, René: Sur l'équation de Riccati. Bull. Sci. math., II. s. 62, 166—171 (1938).

Einfache neue Herleitung der Ergebnisse von Mitrinovitch über die Riccatische Gleichung; vgl. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 568 (1938); dies. Zbl. 18, 86.

W. Feller (Stockholm).

Ziegler, H.: Erzwungene Schwingungen mit konstanter Dämpfung. Ing.-Arch. 9, 163—178 (1938).

Es handelt sich nach geeigneter Normierung um die Differentialgleichung

$$p''(u) + p(u) = g(u) \pm r \quad (p' \leq 0),$$

wo die Störung $g(u)$ eine gegebene Funktion der Periode U und die Dämpfung r eine positive Konstante ist, und wo das Zeichen $+$ oder $-$ zu setzen ist, je nachdem $p'(u)$ negativ oder positiv ist. Die Zeiteinheit ist also so gewählt, daß die durch $p'' + p = 0$ bestimmten Eigenschwingungen die Periode 2π haben. Im Anschluß an Meissner (Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. Zürich 1932) wird nun $p(u)$ als Stützfunktion einer Kurve, des „Linienbildes“ von $p(u)$, gedeutet. Bekanntlich ist dann $p''(u) + p(u) = \rho(u)$ der Krümmungsradius dieser Kurve. Unter der Voraussetzung, daß $g(u)$ in eine Fourierreihe entwickelbar ist, werden nun mit Hilfe dieser Deutung Bedingungen für Beschränktheit bzw. Unbeschränktheit der Lösungen der obigen Gleichung hergeleitet. Im Nichtresonanzfall erweisen sich alle Lösungen als beschränkt, während es im Resonanzfall auf die Größe des n -ten Fourierkoeffizienten von $g(u)$ im Vergleich zu r ankommt, wenn die n -te Partialschwingung von g mit den Eigenschwingungen in Resonanz ist. (Für Spezialfälle vgl. Meissner, Zbl. Mech. 3, 70; Verf., Zbl. Mech. 7, 269.) W. Fenchel (Kopenhagen).

Cherry, T. M.: Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 175—215 (1938).

This paper is concerned with the topological properties of the characteristics on a torus in the presence of singular points. A set of curves is defined in terms of the level curves of a multiple valued analytic function and the trajectories under consideration cut these curves at a constant angle β . The definition is such that there are just two singular points on the torus, one a col, the other a focus. — The methods and many of the results are similar to those of the non-singular case, e.g., corresponding to a trajectory which goes to infinity there is a rotation number α , which is the same for all such trajectories in any one system and there exist periodic trajectories if and only if α is rational. However, in contradistinction to the non-singular analytic case when, according to a result of Denjoy (this Zbl. 6, 305) every trajectory is everywhere dense on the torus when α is irrational, in the present case no trajectory is everywhere dense and there exist pervasive (stable in the sense of Poisson) trajectories of discontinuous type. Examples which illustrate the theory are displayed. Hedlund.

Artemieff, N. A.: Stabilité au sens de Liapounoff et nombre de solutions périodiques. Compositio Math. 6, 78—92 (1938).

Es handelt sich um das System

$$x'_p(t) = X_p(t, x_1, \dots, x_n), \quad (p = 1, \dots, n) \quad (1)$$

wo die X_p für $0 \leq t < \infty$ und alle Punkte x_1, \dots, x_n eines abgeschlossenen Gebiets $\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n)$ stetig sind, die Periodizitätseigenschaft

$$X_p(t + 2\pi, x_1, \dots, x_n) = X_p(t, x_1, \dots, x_n)$$

haben und für

$$A_{pq}(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial X_p}{\partial x_q}$$

die Lipschitzbedingungen

$$|A_{pq}(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - A_{pq}(t, x_1, \dots, x_n)| \leq L \sum_{r=1}^n |\bar{x}_r - x_r|$$

erfüllen. Ist

$$x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t) \quad (2)$$

eine periodische Lösung von (1) mit der Periode 2π , und ist weiter

$$z_{p1}(t), \dots, z_{pn}(t) \quad (p = 1, \dots, n)$$

ein Lösungssystem von

$$z'_\nu(t) = \sum_{q=1}^n \bar{A}_{\nu q}(t) z_q \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

mit

$$\bar{A}_{pq} = A_{pq}(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

und den Anfangswerten $z_{pq}(0) = 1$ für $p = q$ und $= 0$ für $p \neq q$, so gibt es bekanntlich eine konstante Matrix B , so daß $Z(t + 2\pi) = BZ(t)$ mit der Matrix $Z = (z_{pq})$ ist; die Nullstellen der Determinante $|b_{pq} - se_{pq}|$ ($e_{pq} = 1$ oder 0 , je nachdem $p = q$ oder $p \neq q$ ist) sind die charakteristischen Exponenten. — Verf. nennt periodische Lösung der Klasse $H(\beta, g)$ jede der obigen Lösungen (2), die für alle reellen t dem abgeschlossenen Teilgebiet g von \mathfrak{G} angehört und deren charakteristische Exponenten sämtlich einen Realteil $\leq -\beta < 0$ haben. Es wird gezeigt, daß diese periodischen Lösungen stabil sind, und es wird ihre Anzahl abgeschätzt. *Kamke* (Tübingen).

Ritt, J. F.: Systems of differential equations. I. Theory of ideals. Amer. J. Math. **60**, 535—548 (1938).

This paper gives the fundamentals of a projected theory of systems of analytic differential equations similar in generality and rigor to the author's extensive theory of systems of algebraic differential equations (cf. Algebraic aspects of the theory of differential equations, Semi-centennial Addresses. Amer. Math. Soc. **2**, 36—56). The systems immediately considered are required to be algebraic in the derivatives of the unknowns without loss of generality since any finite analytic system is equivalent to such a system obtained from it by the introduction of new unknowns. The results obtained are a basis theorem and a theory of ideals. The basis theorem is obtained essentially by means of the fundamental concepts of reduction, ascending sets and basic sets introduced earlier by the author. Given any infinite system of elements (i. e., left members of equations) there exists a finite subset (the basis) such that any element of the system has a positive integral power which is a linear combination of the elements of the basis. From the basis theorem follows an ideal theory similar to the reviewer's for algebraic differential forms including the unique decomposition of perfect differential ideals of elements into prime ideals. *Raudenbush* (New York).

Mattioli, G. D.: Sulla riduzione di rango dei sistemi pfaffiani. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **27**, 149—155 (1938).

Es sei $\sum \sum a_{ik} dx^i \delta x^k$ die bilineare Kovariante einer $(2n + 1)$ -ären Pfaffschen Form $\sum X_i dx^i$ vom Maximalrang ($= 2n$). Es seien für das System $\sum a_{ik} dx^i = 0$ genau m unabhängige Integrale $f_j(x) = \text{konst.}$ bekannt. Man führe $2n + 1 - m$ weitere Funktionen $f_r(x)$ derart ein, daß $y^i = f_i(x)$ eine Punkttransformation wird, so daß also $\sum X_i dx^i$ vermöge der $f_j(x) = \text{konst.}$ in eine $(2n + 1 - m)$ -äre Pfaffsche Form $\sum Y_r dy^r$ vom gewissen Rang 2ν ($< 2n$) übergeht. Der Zweck der Note besteht in einer Verifizierung der Tatsache, daß dann die Integration des ursprünglichen Problems vom Range $2n$ sich auf die Integration eines Problems vom Range $2(n - \nu)$ und auf eine nachträgliche Quadratur reduziert. — Hat $\sum X_i dx^i$ die Hamiltonsche Normalform, so ist der Satz des Verf. mit dem klassischen Satz über die Reduktion kanonischer Systeme mittels gegebener involutorischer Systeme von Integralen vollkommen identisch (insbesondere ist der Fall $\nu = n$ des Satzes des Verf. nur die invariante Formulierung des Liouvilleschen Satzes). Entsprechend kann 2ν durch den Rang der durch die m gegebenen Integrale $f_j(x)$ erzeugten (Cartanschen) Funktionen-Gruppe ausgedrückt werden. *Wintner* (Baltimore).

Lewy, Hans: Generalized integrals and differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 437—464 (1938).

The paper contains proofs of theorems previously stated by the author (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22**, 377—381), which are quoted as theorems 1., 2., and 3.

in this Zbl. 14, 217. The last theorem may be stated here in detail: Given the system

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\Phi_1, \dots, \Phi_n) \frac{\partial \Phi_j(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m < n)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\Phi_1, \dots, \Phi_n) \frac{\partial \Phi_j(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n)$$

in which a_{ij} and its derivatives up to the 4th order as well as the value of the determinant $|a_{ij}|$ are bounded for bounded values of the Φ_i . Let in a bounded neighbourhood of the origin on the line $\alpha = \beta$ the functions Φ_1, \dots, Φ_n assume relatively bounded values $\xi_1(\alpha), \dots, \xi_n(\alpha)$; let $\xi_1(\alpha), \dots, \xi_n(\alpha)$ depend continuously on α and let there exist a transformation $\zeta_i(\alpha) = \sum_{j=1}^n \xi_j(\alpha) \gamma_{ij}$ with constant γ_{ij} of determinant ± 1 ,

such that the derivatives of $\zeta_1(\alpha), \dots, \zeta_n(\alpha)$ are bounded. Then there exists a solution Φ_1, \dots, Φ_n with the given initial values for all relatively bounded α, β and with continuous derivatives with respect to α and β . (Here a quantity is called a relative bound, if it only depends on bounds previously introduced.) If the initial values and the a_{ij} depend on a parameter μ and converge uniformly as $\mu \rightarrow \mu_0$, then there exists a subsequence of μ , for which the corresponding solutions $\Phi_i(\alpha, \beta)$ converge uniformly.

F. John (Lexington, Ky.).

Siddiqi, M. Raziuddin: On the theory of a non-linear partial differential equation of the elliptic-parabolic type. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 12, 109—119 (1938).

The 'Fourier Method' developed by the author for the unique solution of general non-linear equation of the parabolic and hyperbolic types has been extended to the non-linear partial differential equation of the elliptic-parabolic type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = u^2$$

and for certain boundary and initial conditions, unique solution has been obtained.

Autoreferat.

Cinquini, Silvio: Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali non lineari. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 99—105 (1938).

Ein Satz von H. O. Hirschfeld (dies. Zbl. 13, 264) betreffend die Existenz einer Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vorgegebenen Randwerten wird erneut bewiesen unter Zuhilfenahme eines Existenzsatzes von Tonelli. Ausdehnung auf nichtlineare Differentialgleichungen 2n-ter Ordnung. *Rellich.*

Potentialtheorie:

Lewy, Hans: A property of spherical harmonics. Amer. J. Math. 60, 555—560 (1938).

The author proves the existence of a zero (0, 0, 0) of the Hessian of a spherical harmonic $u(x, y, z)$ of degree $n > 2$. It is first proved, that the non-existence of such a zero would imply, that the surface $u = 0$ divides the unit sphere σ into two distinct opposite convex regions; according to a theorem of R. M. Robinson (Bull. Amer. Math. Soc. 44, 115; this Zbl. 18, 175) there would be a circle of radius 33° either inside one of the regions or in the complementary set of both; but using simple estimates for zeros of Legendre polynomials it follows, that every circle of radius 33° on σ contains a zero of every spherical harmonic of degree ≥ 4 . *F. John (Lexington).*

Green, J. W.: A property of harmonic functions in three variables. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 548—557 (1938).

Es sei Ω eine offene Teilmenge der Einheitskugel S und $u(r, \varphi, \vartheta)$ eine im Innern und auf S stetige harmonische Funktion, deren Normalableitung auf Ω verschwindet.

Verf. beweist, daß u dann und nur dann eine eindeutige und analytische harmonische Fortsetzung über Ω hinaus besitzt, falls auf Ω überall $\int_0^1 u(r, \varphi, \vartheta) dr = \text{konst. ist.}$ —

Wenn eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $M(\varphi, \vartheta)$ auf S definiert ist, so existiert stets eine und nur eine Funktion $u(r, \varphi, \vartheta)$, die im Innern von S definiert und harmonisch ist, für welche $\int_0^1 u(r, \varphi, \vartheta) dr = M(\varphi, \vartheta)$ wird. W. Feller.

Polaczek, F.: Sur les fonctions aréolairement conjuguées. Bull. fac. ști. Cernăuți 11, 266—268 (1938).

Es seien u und v harmonische, U und V beliebige Funktionen von x_1, \dots, x_4 , und es werde $f_0 = u + iv$, $g = U + iV$, $z = x_1 + ix_2$, $z' = x_3 + ix_4$ gesetzt. Man bestimme f_k so, daß $g + f_k$ und f_{k-1} im Sinne der Flächenderivierten konjugiert werden. Dann unterscheiden sich f_k und f_{k+4} bloß um eine analytische Funktion (d. h. sie haben gleiche Flächenderivierte nach z und z'). W. Feller (Stockholm).

Privaloff, I. I.: Sur certaines classes de fonctions subharmoniques et leur représentation analytique. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 2, 191—217 u. franz. Zusammenfassung 217—220 (1938) [Russisch].

In the first part of this paper the author distinguishes three classes of subharmonic functions in the unit sphere. A subharmonic function u is said to be 1° of class (A), if the integrals of u^+ extended over the surfaces of the spheres $r < 1$ are bounded by a finite constant independent of r ; 2° of class (B) if the indefinite integrals $\Phi(e) = \int_e^+ d\omega$,

where e denotes a measurable set on the surface of a sphere $r < 1$ and $d\omega$ an element of the surface, are equally absolutely continuous functions of sets for $r < 1$; 3° of class (C) if the indefinite integrals $\int_e |u| d\omega$ (where e and $d\omega$ have the same meaning

as in 2°) are functions of sets equally absolutely continuous for all r sufficiently near to $r = 1$. There is shown that in order that a subharmonic function u should belong to one of these classes, it is necessary and sufficient that the smallest harmonic majorant of u should be of the same class. Further, the author studies the class H_δ ($\delta > 0$) of logarithmically subharmonic functions v with the property that v^δ is of class (B), or what is shown to be equivalent in that case, with the property that v^δ is of class (A). — In the second part of the paper there are investigated holomorphic functions in the

unit circle, given by an integral of the Cauchy-Stieltjes type $\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\psi(\theta)}{e^{i\theta} - z}$,

where $\psi(\theta)$ is a complex function of bounded variation in $[0, 2\pi]$. The author proves the theorems: I. In order that $\Psi(z) \rightarrow \psi'(\theta)$ as $z \rightarrow e^{i\theta}$ (along any path not touching

the circle) for almost every θ , it is necessary and sufficient that $\int_0^{2\pi} e^{ni\theta} d\psi(\theta) = 0$

for $n = 1, 2, \dots$; if this condition is satisfied, $\psi(\theta)$ is absolutely continuous. II. The same condition is necessary and sufficient in order that the Poisson-Stieltjes integral corresponding to $\psi(\theta)$ should represent a function holomorphic in the unit circle. — In connection with these results the author establishes the equivalence of representations of holomorphic functions in the unit sphere by means of the integrals of Cauchy, Poisson, Poisson-Stieltjes, and Cauchy-Stieltjes. — The memoir is related to the papers by F. Riesz [Math. Z. 18, 87—95 (1922)], G. Fichtenholz [Fundam. Math. 13, 1—33 (1929)], A. Plessner [Mitt. math. Semin. Gießen 10, 1—36 (1923)], and to the former paper by the author [Rec. math. Soc. math. Moscou 3 (45), 1—25 (1938); this Zbl. 18, 408]. Saks (Warszawa).

Privaloff, I. I.: Sur une classe de fonctions subharmoniques en rapport avec sa représentation analytique. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 3, 303—311 u. franz. Zusammenfassung 312 (1938) [Russisch].

L'auteur développe une partie d'une Note antérieure (ce Zbl. 18, 408). Il considère à l'intérieur de la sphère unité (espace à $p \geq 2$ dim.) les fonctions sousharmoniques $u(r, \theta_1, \dots, \theta_{p-1})$ en coordonnées sphériques. Il étudie la classe B_q de celles pour lesquelles l'intégrale dans le champ des θ sur l'ensemble e de la sphère unité $\int (u^+)^q d\omega$ ($q \geq 1$) est uniformément et absolument continue de e pour $r < 1$. Un critère d'appartenance est que la plus petite majorante harmonique dans la sphère appartienne à B_q et dans le cas $q < 1$, que la même intégrale étendue à toute la sphère soit bornée ($r < 1$).

Brelot (Bordeaux).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik:

Urban, P.: Über die Bestimmung gewisser Eigenwerte der Wellenmechanik. Ann. Physik, V. F. 32, 471—488 (1938).

Betrachtet wird das Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$x^2(\alpha_2 + \beta_2 x^h + \gamma_2 x^i) y'' + x(\alpha_1 + \beta_1 x^h + \gamma_1 x^i) y' + (\alpha_0 + \beta_0 x^h + \gamma_0 x^i) y = 0,$$

wobei β_0 als Eigenwertparameter angesehen wird. Der Potenzreihenansatz liefert eine dreigliedrige Rekursionsformel; sie wird in einen Kettenbruch verwandelt, aus dem man schrittweise die Näherungen der Eigenwerte berechnen kann. Als Beispiele werden das sphärische Pendel der Wellenmechanik und die Differentialgleichung des Wasserstoffmoleküls behandelt.

Rellich (Marburg a. d. L.).

Hallén, Erik: Über einige Wellenprobleme. Norsk mat. Tidsskr. 20, 59—67 (1938) [Schwedisch].

The author uses Zeilon's method based on the Fourier integral in order to solve certain boundary value problems. He determines the fundamental solution of the equations of motion in an elastic medium and discusses boundary value problems for the wave equation in two and in three dimensions as well as for the equation of telegraphy. The solutions have been found previously by other methods, but the author's discussion presents some advantages.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Dolidze, D.: Solution of a general lineary boundary problem of rotation of the fluid. Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 77—86 (1938) [Russisch].

Let the viscous incompressible fluid occupy an internal region of a surface σ of revolution, which is rotating about axis of symmetry of z . The angular velocity of the surface is a given function depending from the time t . — Let $u(r, z, t)$ denote the velocity of rotation of the fluid at a distance r from the axis of z , μ —coefficient of viscosity. The differential equation for the rotation of the fluid we get in the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

The boundary and initial conditions are

$$u(\sigma, t) = r_\sigma \omega(t), \quad u(r, z, 0) = f(r, z).$$

At first we reduce the initial condition to the zero; after that by using the principle of superposition we construct the potential, which is analogue to the heat potential of double layer. In the case of closed region, the solution of present problem comes to the Volterra integral equation of second kind. In the case of an open region (an infinite region) the solution is constructed immediately.

Autoreferat.

Dolidze, D.: On the one boundary problem of the hydrodynamics. Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 89—99 (1938) [Russisch].

The object of the present note is to study one boundary problem of rotation of a viscous incompressible fluid. The differential equation of rotation round the axis

of z , in the system of cylindrical coordinates ϱ, θ, z is

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{\varrho^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

The rotation velocity $v(\varrho, z, t)$ satisfies the following boundary and initial conditions:

$$(v)_\sigma = \varrho_\sigma \omega(t), \quad v(\varrho, z, 0) = f(\varrho, z),$$

where σ is a boundary surface. — In this note we consider the cases, when the region of motion is limited by a circular cone and by coaxial cones. At first, by means of some integral representations, we reduce the boundary condition to zero; after that we use the Fourier's method. *Autoreferat.*

Scherman, D.: Les problèmes statiques à deux dimensions de la théorie de l'élasticité. Trav. Inst. Math. Tbilissi 2, 163—225 u. franz. Zusammenfassung 225 (1937) [Russisch].

Die Arbeit betrifft eine Ausdehnung der allg. Methode von N. Muschelišvili (vgl. Zbl. Mech. 2, 251) zur Lösung zweidimensionaler Probleme der Elastizitätstheorie, die bekanntlich auf der Zurückführung des Problems auf einfache Integralgleichungen beruht. In §§ 1 und 2 der Arbeit entwickelt der Verf. ausführlich die bereits in C. R. Acad. Sci. URSS 9, 127 (1935) und 10, 206 (1936) veröffentlichten Ergebnisse. Insbesondere enthält § 1 Existenzbeweise der Lösung der Probleme erster Art (vorgegebene Randspannungen). Den Ausgangspunkt bildet dabei die von N. Muschelišvili erhaltene Integralgleichung. Darauf folgt die Umgestaltung dieser Gleichung auf eine zur Durchführung der Rechnung in konkreten Fällen besser geeignete Form. In §§ 2 und 3 wird die Methode von Muschelišvili auf Probleme zweiter Art (vorgegebene Randverschiebungen) sowie auf gemischte Aufgaben (gewisse Ränder eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes mit vorgegebenen Spannungen, andere mit vorgegebenen Verschiebungen) ausgedehnt. Zuletzt wird im § 4 eine neue Lösungsmethode für genannte Probleme (gegründet auf dieselben funktionentheoretischen Hilfsmittel wie die Methode von Muschelišvili) vorgeschlagen, welche zwar in der Anwendung auf konkrete Aufgaben weniger bequem ist als die Methode von Muschelišvili, dafür aber gewisse theoretische Vorteile (bei Existenzbeweisen u. dgl.) zu haben scheint.

M. T. Huber (Warszawa).

Korn, Arthur: Über die Entwicklung der Lösung der Telegraphengleichung nach Besselschen Funktionen. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 352—362 (1938).

Verf. geht von dem Poincaréschen Ergebnis aus, demnach der Strom auf einer Leitung mit verteiltem Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion durch einen Integralausdruck, dessen Integrand eine Besselsche Funktion erster Art nullter Ordnung enthält, dargestellt werden kann, wenn die Spannung am Anfang der Leitung als Funktion der Zeit gegeben ist. An Stelle einer unendlich langen Leitung kann man mit Hilfe kombinatorischer Methoden das Problem für begrenzte Leitungen lösen, auch wenn die Leitung noch eine verteilte Ableitung besitzt. Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit darum, die obengenannte allgemeine Integralformel in Reihen zu entwickeln. Hierzu wird unter Zuhilfenahme einfacher Substitutionen die Reihenentwicklung der Besselschen Funktion benutzt. Als Ergebnis zeigt sich, daß der Strom durch eine unendliche Reihe dargestellt wird, dessen Glieder Besselsche Funktionen erster Art gerader Ordnung sind, multipliziert mit gewissen Koeffizienten, die aus Integralformeln berechnet werden können. Verf. leitet für diese Koeffizienten eine Reihe von Rekursionsformeln ab. Verf. zeigt, daß durch die vorliegenden Rechnungen ein von ihm früher angegebenes Ergebnis bezüglich des Stromes auf einer Leitung in eleganterer Form erhalten werden kann.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Eckersley, T. L., and G. Millington: Application of the phase integral method to the analysis of the diffraction and refraction of wireless waves round the earth. Philos. Trans. roy. Soc. Lond. A 237, 273—309 (1938).

For reference to the „phase integral method” see this Zbl. 2, 222 and 5, 43. This

method is here applied to the determination of expressions for the electromagnetic field produced by a vertical dipole above a spherical earth of finite conductivity, where the atmosphere may also have a variable refractive index. The analysis is applied to "the region where the first term of the diffraction formula predominates". The effect of finite earth conductivity on the potential function is worked out and shown in the form of curves; curves are also given for the increase of the potential function with height above the earth's surface, for various wavelengths. An expression is found for the absolute value of field-strength at points on the earth's surface. The effect of air refraction is considered to a first approximation by assuming a constant gradient of refractive index. An appendix gives an expression, suitable for computation, which includes further terms of the diffraction formula. *Mary Slow-Taylor.*

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Delsarte, J.: Sur une extension de la formule de Taylor. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 213—231 (1938).

Taylor's formula joins three operators, viz (1) the translation $f(x) \rightarrow f(x+y)$, (2) the first n iterates of the differential operator d/dx , and (3) the remainder. The author replaces the differential operator by a linear operator b_x which has a sense in a certain class A of functions of a real variable x and which has a continuous spectrum S in the complex plane with characteristic functions $j_\lambda(x)$. He supposes $\lambda = 0$ in S , $j_\lambda(0) = 1$, and $j_\lambda(x) = \sum_0^\infty \varphi_n(x) \lambda^n$ for small λ in S where $\varphi_n \in A$ and the series converges for all x . The translation operator $T^y = T_x^y$ is first defined for a sub-class A_0 of A by the infinite "Taylor series"

$$T_x^y[f(\xi)] = \sum_0^\infty \varphi_n(y) b_x^{(n)}[f(\xi)].$$

Here $T_x^0[f(\xi)] = f(x)$. Let the adjoint operation be

$$\tilde{T}_x^y[f(\xi)] = \sum_0^\infty \varphi_n(x) b_y^{(n)}[f(\xi)].$$

T^y commutes with T^z and \tilde{T}^z and satisfies the equation $b_x \tilde{T}^y = b_y T^x$. Assuming that $\Phi \equiv 0$ is the only solution of the equation $b_y \Phi(x, y) = b_x \Phi(\xi, y)$ which belongs to A in both variables separately and which reduces to zero for $y = 0$, the author shows that the translation operator admits of a unique extension which belongs to A in both variables (the operator is not necessarily definable for every element of A , however). Under the same hypothesis, the equation

$$b_y[\Phi(x, y)] - b_x[\Phi(\xi, y)] = f(x, y)$$

has at most one solution belonging to A in both variables and $= 0$ for $y = 0$. Let $_{x,y}[f(\xi, \eta)]$ be this solution when it exists. The generalized Taylor formula then reads

$$T_x^y[f(\xi)] = \sum_{m=0}^{-n} \varphi_m(y) b_x^{(m)}[f(\xi)] + i_{x,y}\{\varphi_n(\eta) b_\xi^{(n+1)}[f(\xi)]\}.$$

The last part of the paper is devoted to an extension of the notion of mean-periodic functions, previously introduced by the author. He considers an Abelian family of linear operators T^y with the properties $T^0 = I$, $T^y T^z = T^z T^y$, and $T^y \tilde{T}^z = \tilde{T}^z T^y$. A linear operator Δ is said to be attached to the family T^y if Δ commutes with \tilde{T}^y for every y . If Δ_0 is a linear functional in A , then $\Delta_0\{T_x^\xi[f(\eta)]\}$ is an attached operator and vice versa. $f(x)$ is mean-periodic with respect to T^y and Δ if $\Delta_x[f(\xi)] \equiv 0$. To these operators correspond Bernoullian functions $B_n(x)$, having the properties $\Delta_x[B_n(\xi)] = \varphi_n(x)$ and $b_x[B_n(\xi)] = B_{n-1}(x)$ and, finally, the Euler-

MacLaurin summation formula

$$T_x^\eta[f(\xi)] = \sum_{m=0}^n B_m(y) \Delta_x \{ \delta_\xi^{(m)} [f(\eta)] \} + \\ + \Delta_0 [i_{x,y} \{ \delta_\xi^{(n+1)} [f(\zeta)] T_\eta^\alpha [B_n(\zeta)] \} - i_{x,\alpha} \{ \delta_\xi^{(n+1)} [f(\zeta)] T_\eta^\eta [B_n(\zeta)] \}].$$

The special case in which δ_x is the operator of the Bessel differential equation is worked out in detail.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Michlin, S.: L'extension de l'opération de l'intégration singulière pour l'espace L_2 . C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 19, 353—355 (1938).

Soit X un point courant dans l'espace euclidien à m dimensions, et soit $F(X; x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m)$ une fonction positivement homogène et d'ordre $-m$ par rapport aux différences $x_\nu - a_\nu$ ($1 \leq \nu \leq m$); cette fonction dépend aussi de X , dont les coordonnées sont x_1, \dots, x_m . Soit d'autre part $w(A)$ ou $w(a_1, \dots, a_m)$ une fonction qui remplit une condition de Lipschitz (dite aussi: condition de Hölder), et qui s'annule à l'infini d'une certaine façon. L'aut. considère des opérations intégrales $\int F(X; x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m) w(A) d\tau_A$, où $d\tau$ est l'élément euclidien et l'intégrale, étendue à tout l'espace, est prise en valeur principale, en excluant du champ une hypersphère infiniment petite de centre X . L'aut. annonce d'abord que ces opérations intégrales linéaires peuvent être définies de manière à s'appliquer à toute fonction w sommable et de carré sommable, s'annulant assez vite à l'infini (ces dernières fonctions w sont considérées par l'aut. comme éléments d'un espace L_2). Ensuite, en introduisant les produits symboliques de telles opérations linéaires, l'aut. indique $m-1$ opérations intégrales de ce type, telles que toute autre opération du même type puisse être considérée comme une série dont chaque terme soit un produit de puissances positives et négatives de ces $m-1$ opérations particulières. Enfin l'aut. annonce que si v est la fonction transformée de w par une de ces opérations particulières, on a $\int |v|^2 d\tau = \int |w|^2 d\tau$. Des démonstrations sont esquissées. L'auteur avait énoncé antérieurement ces résultats dans le cas particulier où m est ≤ 2 (les deux derniers disparaissent pour $m=1$) (ce Zbl. 14, 66; 17, 168); mais ses raisonnements actuels s'appuient sur des résultats annoncés par le soussigné (ce Zbl. 14, 309), dont la méthode, qui s'applique à toute valeur de m , fait appel, même pour $m=2$, à d'autres considérations que la méthode antérieure de Michlin (voir aussi Giraud, ce Zbl. 16, 166).

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Pettis, B. J.: A note on regular Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 420—428 (1938).

A Banach space B_0 is regular if every linear functional on the conjugate space B_1 is of the form $f(x)$ where $f \in B_1$, $x \in B_0$. A regular space is weakly complete and weakly compact and every one of its closed linear subspaces is regular. The regularity of B_0 is equivalent to the statement that the notions of closure and regular closure for linear sets in the second conjugate space B_2 coincide which in turn is equivalent to the statement that B_0 is weakly complete and for linear manifolds in B_2 regular closure and weak closure as a set of functionals over B_1 are equivalent. If a B_0 valued function $Y(R)$ of Euclidean figures is of bounded variation in the sense that $\sum \|Y(R_i)\|$ is bounded where R_i are non-overlapping subintervals as a fixed interval R_0 , and if $Y(R)$ is weakly differentiable almost everywhere then the derivative is integrable in the sense of Bochner. If B_0 is regular the function Y has a strong derivative almost everywhere, a fact proved also by Gelfand (this Zbl. 18, 71). If B_0 is regular then a function $T(\Phi)$ from $L(0, 1)$ to B_0 is linear if and only if there is an essentially bounded and measurable

function $x(s)$ on $(0, 1)$ to B_0 such that $T(\Phi) = \int_0^1 x(s) \Phi(s) ds$. The norm of T is $\text{ess. sup. } \|x(s)\|$.

N. Dunford (New Haven).

Bourbaki, Nicolas: Sur les espaces de Banach. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1701—1704 (1938).

Let E denote the space of Banach. Then the class of all linear functionals on E is a space of Banach denoted by \bar{E} and called the dual of E . The norms in E and \bar{E} determine a uniform structure called the strong structure. Weak uniform structures are defined as follows by means of filters [H. Cartan, C. R. Acad. Sci., Paris 205, 595—598, 777—779 (1937); this Zbl. 17, 243 and 18, 3]. In E , by the filter with base the family of sets $A(X_1, X_2, \dots, X_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ of pairs (x, y) of points of E such that $|X_k(x) - X_k(y)| < \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). The integer n is arbitrary and X_k is any linear functional. The numbers ε_k are any positive numbers whatever. In \bar{E} , by the family of sets $B(x_1, x_2, \dots, x_p; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ of pairs of functionals (X, Y) such that $|X(x_k) - Y(x_k)| < \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$); n arbitrary, x_k any points of E , and the ε_k are any positive numbers. The weak structure of \bar{E} is induced by the uniform structure of the space P_E of the real functions defined on E . In \bar{E} every strongly closed sphere is weakly closed. In general this does not hold in E . If V is a linear variety in \bar{E} distinct from \bar{E} such that the intersection of V with an arbitrary sphere of \bar{E} is weakly compact there is for every X_0 in $\bar{E} - V$ an element x_0 of E orthogonal to V but not to X_0 . If \bar{E} is the dual of \bar{E} , \bar{E} is equivalent to E if and only if every sphere of E is weakly compact. These results apply to normal vectorial spaces which are not complete.

E. W. Chittenden (Iowa City).

Wehausen, John V.: Transformations in linear topological spaces. Duke math. J. 4, 157—169 (1938).

A. Kolmogoroff [Studia Math. 5, 29—33 (1934); this Zbl. 10, 182] and J. von Neumann [Trans. Amer. Math. Soc. 37, 1—20 (1935); this Zbl. 11, 164] have defined non-metric topologies for linear spaces which are equivalent. If L_1, L_2 are linear topological spaces and $T(x)$ is a linear continuous transformation on L_1 to L_2 the image of a bounded subset R of L_1 is bounded. If L contains a bounded open set and the additive transformation $T(x)$ takes bounded sets into bounded sets, then $T(x)$ is continuous. A linear topological space is metrizable as an F -space if there exists a bounded open set in the space. A necessary and sufficient condition that a convex linear space have a topologically equivalent norm-metric is that it contain a bounded open set. Let \mathfrak{U} be a family of neighborhoods determining a space L . If $T(x)$ is an additive transformation such that for every U in \mathfrak{U} , $T(U)$ is bounded, then $T(x)$ is strongly bounded. Such transformations are continuous. Using the pseudo-norm $\|x\|_U$ of von Neumann (loc. cit.), defined for convex spaces, it is shown for such spaces that continuity of an additive $T(x)$ is equivalent to boundedness. Conventional theorems on functionals are extended to convex linear spaces. — The functionals on a normed space L determine a weak topology with respect to which L is convex. A normed space which admits no finite total set of functionals is of the first category in its weak topology. A normed space L has a finite total set of functionals if and only if it is finite dimensional. The weak neighborhood topology of a linear space L is norm-metrizable if and only if it is finite dimensional. Relative to the weak topologies of normed linear spaces L_1, L_2 any additive transformation $T(x)$ which takes bounded sets into bounded sets is continuous.

E. W. Chittenden (Iowa City).

Variationsrechnung:

Bliss, G. A.: Normality and abnormality in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 365—376 (1938).

This paper discusses the meaning of normality and abnormality of minimizing arcs in the general problem of Bolza in the calculus of variations. In particular it is shown that if an abnormal admissible arc satisfies the sufficiency conditions given by Hestenes [Trans. Amer. Math. Soc. 36, 793—818 (1934); this Zbl. 10, 306] then it is a normal minimizing arc for a related problem of Bolza. A minimizing arc for

the related problem is always a minimizing arc for the original problem also. It is a consequence of this result that the sufficiency theorem of Hestenes for normal arcs implies that theorem in its full generality. *Graves (Chicago).*

Cimmino, Gianfranco: *Sulle estremanti degli integrali doppi in forma ordinaria.* Rend. Semin. mat. Univ. Padova 8, 110—119 (1937).

The object of this note is to establish the following theorem. Let $F(x, y, z, p, q)$ be continuous with its partial derivatives of order ≤ 3 , and let

$$F_{pp} > 0, \quad F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0.$$

If $z_0(x, y)$ satisfies a Lipschitz condition and on it the first variation of $\iint F dx dy$ is zero, then z_0 has second partials which satisfy a Hölder condition. The proof is based on theorems published in the *Lincei Rendiconti* by Cacciopoli. The theorem of this note is contained in a paper published earlier in the year by C. B. Morrey [Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126—166 (1938); this Zbl. 18, 405]. *McShane.*

Morse, Marston: *The index theorem in the calculus of variations.* Duke math. J. 4, 231—246 (1938).

In this paper, the author gives a new and simpler proof of his "index theorem". Let R be an m -dimensional manifold of class C^{r+1} ($r > 2$), with an invariant arc length $j = \int F(x, \dot{x}) dt$, where the integrand is of class C^r , regular, and positive homogeneous of order 1 in (\dot{x}) . Let $g: AB$ be an extremal arc $x^i = x^i(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Denote by ω the lower bound of the lengths on g between a point on g and its first following conjugate point. Let $a_0 < a_1 < \dots < a_{p+1}$ ($a_0 = t_1$; $a_{p+1} = t_2$) be a set of values of t such that $a_s - a_{s-1} < \omega$ ($s = 1, \dots, p+1$), and A_0, \dots, A_{p+1} be the corresponding points on g . Consider regular $(m-1)$ -manifolds M_q of class C^r intersecting g at A_q , but not tangent to g there. Suppose M_q regularly represented near A_q in terms of parameters w_q^j ($j = 1, \dots, m-1$) in such a manner that $(u_q) = (0)$ determines A_q on g . Writing the sets w_q^j in the form $z^1, \dots, z^{(m-1)} = (w_1^1, \dots, w_1^{m-1}, \dots, w_p^1, \dots, w_p^{m-1})$, (z) determines a set of points P_1, \dots, P_p on M_q . For (z) sufficiently near (0) , the successive points can be joined by extremal arcs forming a broken extremal $E(z)$, with length $j(z)$. Then the index theorem asserts that $(z) = (0)$ is a critical point of $j(z)$ with an index equal to the number of conjugate points of t_1 on g preceding t_2 , and a nullity equal to the order of t_2 as a conjugate point of t_1 on g . The proof given here is direct, without reduction of the parametric case to the non-parametric case.

S. B. Myers (Ann Arbor).

Shiffman, Max: *The Plateau problem for minimal surfaces which are relative minima.* Ann. of Math., II. s. 39, 309—315 (1938).

Recent solutions of the problem of Plateau have, with one exception [Radó, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 869—887 (1933); this Zbl. 8, 82] yielded a surface whose area is the absolute minimum under the given boundary conditions. The author develops a theorem for the case of several boundary curves which ensures the existence of a minimal surface which gives a relative minimum to the area. The diameter of a surface $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, (u, v) on G , is defined to be the lower bound of the diameters of all curves on the surface which are images of non-bounding curves in G . For the case of two contours Γ_1 and Γ_2 the functions d_α, δ_α ($\alpha < 0$) are defined to be the lower bounds of the Dirichlet integral of \mathfrak{x} on the class of surfaces bounded by Γ_1 and Γ_2 and of diameters $\leq \alpha$, resp. $= \alpha$. Then if there is a positive α such that $d_\alpha < \delta_\alpha$, there is a minimal surface bounded by Γ_1 and Γ_2 . This can be extended to n contours. The method of proof is similar to that used by Courant [Ann. of Math. (2) 38, 679—724 (1937); this Zbl. 17, 268]. *McShane (Virginia).*

Funktionentheorie:

Bermant, A.: *Remarque sur le lemme de Schwarz.* C. R. Acad. Sci., Paris 207, 31—33 (1938).

$f(z)$ being regular for $|z| < 1$, the methods of a previous paper (this Zbl. 18, 143)

are used to obtain bounds for $f'(z)$ from assumptions concerning the largest star domain of centre $[z, f(z)]$ in the Riemann surface of $f(z)$. Applications to the theory of normal families are made.

Macintyre (Aberdeen).

Tryboń, A.: Über die Konvergenz von Abschnittsfolgen einer Potenzreihe in Gebieten, welche außerhalb des Konvergenzkreises liegen. C. R. Soc. Sci. Varsovie 31, 1—6 (1938).

L'A. démontre l'existence d'une fonction f , holomorphe dans le cercle unitaire $|z| < 1$, telle, qu'à chaque domaine G , simplement connexe et n'ayant aucun point commun avec ce cercle, et à chaque fonction g holomorphe dans G , corresponde une suite de polynômes-sections de la série de Taylor de f convergeant vers g dans G , et convergeant uniformément dans tout ensemble fermé et borné faisant partie de G .

Mandelbrojt (Paris).

Boas jr., R. P.: Representations for entire functions of exponential type. Ann. of Math., II. s. 39, 269—286 (1938).

The author proves that if $f(z)$ is an entire function satisfying

$$|f(z)| < Ae^{R|z|} \quad (1)$$

which belongs to $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$, on the real axis, then

$$f(z) = \int_{-R}^R e^{izt} a(t) dt, \quad (2)$$

where $a(t) \in L_{p/(p-1)}(-R, R)$. If $f(z)$ has the form (2) with $a(t) \in L_p(-R, R)$, $1 < p \leq 2$, then $f(z)$ satisfies (1) and belongs to $L_{p/(p-1)}(-\infty, \infty)$ on the real axis. (For $p = 2$ this result is due to Paley and Wiener, Fourier transforms in the complex domain. The second result has also been found by Plancherel and Pólya, this Zbl. 16, 360.) Both theorems fail for $p > 2$. $f(z)$ satisfies (1) and belongs to L_1 on the real axis if and only if $f(z)$ has the form (2) with $a(-R) = a(R) = 0$ and $a(t)$ having an absolutely converging Fourier series on $(-R, R)$. If $f(z)$ satisfies (1) and belongs to L_p , $p > 2$, on the real axis, then

$$f(z) = \int_{-R}^R e^{izt} d\alpha(t),$$

where $\alpha(t)$ is continuous and satisfies a Lipschitz condition of every order $< 1/p$. If $f(z)$ is of zero type, i. e., satisfies (1) for every $R > 0$, then for every non-negative, strictly increasing and convex function $\varphi(t)$, the condition $\varphi(|f(z)|)$ integrable along a line in the complex plane implies $f(z) \equiv 0$. Finally, if $f(z)/(1 + |z|^n)$ belongs to L_p , $p \geq 1$, on a line, then $f(z)$ is a polynomial of degree $\leq n - 1$ ($n - 2$ if $p = 1$).

E. Hille (New Haven, Conn.).

Matison, Harry: Certain integral functions related to exponential sums. Duke math. J. 4, 9—29 (1938).

The relation between a function $f(z) = \sum a_n z^n$ and its Borel transform $F(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n$ can be studied most readily if $f(z)$ is a rational function with simple poles

$$f(z) = \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1 z} + \frac{\alpha_2}{1 - \beta_2 z} + \dots \quad (*)$$

in which case

$$F(z) = \alpha_1 e^{\beta_1 z} + \alpha_2 e^{\beta_2 z} + \dots \quad (**)$$

If the numbers β_n lie on the unit-circle, a_n is a periodic function in n . — The author assumes more generally that a_n is almost periodic in n . It had been shown by Bochner and Bohnenblust that even in this case the formal expression (*), although infinite, indicates the nature and position of the singularities of $f(z)$. The author establishes many interesting results concerning the rate of growth and the distribution of zeros of the corresponding function $F(z)$.

Bochner (Princeton).

Obrechhoff, Nikola: Sur les fonctions entières limites de polynômes dont les zéros sont réels et entrelacés. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1874—1876 (1938).

The author finds necessary and sufficient conditions in order that two integral

functions $f(z)$, $\varphi(z)$, without common zeros, be uniform limits of polynomials with real and interlaced zeros: $f(z)$ and $\varphi(z)$ be of the form

$$f(z) = g \cdot e^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{z/\alpha_n}, \quad \varphi(z) = g_1 \cdot e^{-\gamma_1 z^2 + \delta_1 z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right)^{z/\beta_n},$$

where α_n, β_n are real and separating, $\gamma = \gamma_1 \geq 0$, δ, δ_1 real, $\sum_1^{\infty} \alpha_n^{-2}$, $\sum_1^{\infty} \beta_n^{-2}$ convergent. Moreover, if we denote by $\alpha_{n_1}, \beta_{n_1}$ the positive zeros and by $\alpha_{n_2}, \beta_{n_2}$ the negative zeros (of f and φ respectively, each sequence arranged by increasing absolute values) we have

$$\delta_1 - \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{n_1}} - \frac{1}{\beta_{n_1}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{n_2}} - \frac{1}{\beta_{n_2}}\right).$$

These conditions simplify considerably if the zeros of the approximating polynomials are positive. The proofs (not given) are based on new inequalities for rational functions with interlaced zeros and poles (of same signs), and on some work of Montel (this Zbl. 5, 300; 8, 20).

I. J. Schoenberg (Waterville, Me.).

Mangler, W.: Zwei Bemerkungen zum Abbildungssatz von Schwartz-Christoffel. Z. angew. Math. Mech. 18, 251—252 (1938).

Ikeda, Yosiro: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. II. Physics 2, 1—28 (1938).

Es werden mittels der Schwartz-Christoffelschen Formel eine große Zahl polygonaler Bereiche mit 2 Ecken im Endlichen auf die obere Halbebene abgebildet. Für alle möglichen Kombinationen der Winkel $\pm \frac{n\pi}{3}$ ($n = 1, 2, 3$) in den zwei Ecken werden 13 verschiedene Abbildungsfunktionen abgeleitet, während im Falle der Winkel $\pm \frac{n\pi}{4}$ ($n = 1$ bis 4) sogar 21 Abbildungsfunktionen behandelt werden. Im allgemeinen ergeben sich durch Integration elementare Funktionen in Verbindung mit den elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung. Durch Spiegelung können eine Reihe weiterer Polygonabbildungen gewonnen werden. Obwohl die Abbildungsfunktionen nur bis zur oberen Halbebene geführt werden, also ohne physikalischen Inhalt bleiben, sind 18 Figuren in großem Format beigelegt, welche Kraftlinien- (oder Stromlinien-) und Potentialbilder für verschiedene Annahmen zeigen. Besonders interessant sind einige graphische Kombinationsmethoden, welche gestatten, aus bekannten zwei Abbildungen eine dritte zu konstruieren.

Ernst Weber (New York).

Khajalia, G.: Sur la représentation conforme des domaines doublement connexes. Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 123—133 u. franz. Zusammenfassung 134 (1938) [Russisch].

Cf. this Zbl. 16, 407. In the present work a sequence of rational functions satisfying a different minimal condition ($\int \int |Q_n(z)|^2 dx dy$ a minimum) gives the representation of a doubly connected domain on an annulus.

Macintyre (Aberdeen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

● *Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Publié par Émile Borel. Tome 4. Applications diverses et conclusion. Fasc. 2. — Borel, Émile: Applications aux jeux de hasard. Rédig. par Jean Ville. Paris: Gauthier-Villars 1938. XI, 122 pag. et 5 fig. Frs. 60.—.*

Um die Natur der mathematischen Probleme klarzulegen, die sich an die Hasardspiele knüpfen, wählt Verf. einige spezielle Beispiele aus, die dann eingehend behandelt und gelöst werden. Kap. I behandelt das Würfelspiel, Kap. II vor allem das Pascalsche „problème des partis“ und dessen vom Verf. eingeführte Verallgemeinerung (vgl.

dies. Zbl. 15, 166). Weiter werden Wiederholungen eines unsymmetrischen Spieles untersucht, bei denen der Verlierende der n -ten Partie bei der $(n+1)$ -ten den Vorteil erhält. Kap. III behandelt das Kartenspiel, und zwar in einer strengeren Weise, als dies oft geschieht. Kap. IV bringt Spiele, die hauptsächlich von der Psychologie der Spieler abhängen, von der Art des vom Verf. untersuchten und in dies. Zbl. 15, 406 ref. strategischen Spieles. Kap. V enthält die Theorie des Pokerspieles als Beispiel eines Spieles, das von Psychologie und Zufall abhängt. — In einem Anhang gibt J. de Ville einen neuen und elementaren Beweis des von Neumannschen Satzes über die günstigste Spielstrategie [Math. Ann. 100 (1927)] und verallgemeinert ihn auch auf den stetigen Fall. Verf. knüpft daran einige Bemerkungen über die Unzulänglichkeit der Methode für praktische Spielzwecke. W. Feller (Stockholm).

Doob, J. L.: Stochastic processes with an integral-valued parameter. Trans. Amer. Math. Soc. 44, 87—150 (1938).

In seiner früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 17, 27) hat Verf. die von einem stetigen Parameter abhängenden stochastischen Prozesse $x(t)$ untersucht. Diesmal handelt es sich um die Untersuchung von diskreten Aggregaten $\{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ stochastischer Veränderlichen x_k , die auf einer abstrakten Menge X definiert sind. Analytisch dreht es sich also um die Maßtheorie im Raume Ω , dessen Punkte Folgen $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ mit $x_k \in X$ sind. Im Falle, daß X die Menge der reellen Zahlen ist, hat bekanntlich Kolmogoroff eine Maßtheorie in Ω entwickelt, indem er von den endlichen Zylindermengen $\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_p}\}$ ausging. Verf. überträgt dieses Verfahren auf den Fall beliebiger X . Bei den verschiedenen Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht man sich nun gewöhnlich nicht unmittelbar auf die so definierten Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ der Mengen $A \subset \Omega$, sondern auf gewisse bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}; A)$ von A , welche sich ergeben, wenn vorgegebene $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}$ „als bekannt“ vorausgesetzt werden. Indem man von der Mengenfunktion $P(A)$ ausgeht, werden Definition und Relationen für diese bedingten Wahrscheinlichkeiten eingehend untersucht. Es handelt sich hierbei, wie Verf. bemerkt, zwar nicht um neue Ideen, aber einzelne Sätze wurden niemals explizite ausgesprochen, und die ganze systematische Darstellung ist sehr willkommen. Auch das umgekehrte Problem, nämlich der Bestimmung der Maße $P(A)$ aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten wird behandelt. (In konkreten Fällen handelt es sich hierbei um die Berechnung der „absoluten Wahrscheinlichkeiten“ aus gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten.) Insbesondere wird ein Existenzbeweis im Falle der Markoffschen Prozesse geliefert. Unter diesem Namen werden neuerdings bekanntlich alle Prozesse zusammengefaßt, für welche in leicht verständlicher Schreibweise für $m \leq n$ stets $P(x_m, \dots, x_n; A) = P(x_n; A)$ ist, für jede meßbare Zylindermenge über x_{n+1} . — Es sei T die durch $x_k \rightarrow x_{k-1}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) definierte Abbildung von Ω auf sich. Der betrachtete Prozeß heißt zeitlich homogen, falls T die Maße $P(A)$ ungeändert läßt. Derartige Prozesse, und ganz besonders solche vom Markoffschen Typus, bilden den Hauptgegenstand der Arbeit. Es handelt sich hier um eine systematische Anwendung der allgemeinen Theorie der maßerhaltenden Transformationen und insbesondere der Ergodentheorie von Birkhoff, Hopf, Koopman und von Neumann. Vor allem wird eingehend untersucht, wie sich verschiedene Eigenschaften derartiger Transformationen, sowie metrische Transitivität oder Winkelveränderliche, in den bedingten Wahrscheinlichkeiten des Prozesses ausdrücken. Dadurch wird die Theorie der diskreten Prozesse organisch in einen allgemeinen Rahmen eingebaut, und es gelingt in dieser Weise eine Reihe von höchst bedeutsamen Einzelresultaten, die früher mit sehr verschiedenen Methoden erhalten wurden, zum Teil sogar in verschärfter Form einheitlich abzuleiten und so naturgemäß in die allgemeine Theorie einzuordnen. In dieser Vereinheitlichung der Methoden scheint Ref. der Hauptfortschritt der Arbeit zu liegen. — Im Falle, daß die x_k paarweise unabhängige stochastische Veränderliche sind, liefert die Ergodentheorie bekanntlich das starke Gesetz der großen Zahlen (Doob, E. Hopf,

Khintchine). Verf. erhält nun hier auf diesem Wege weiter auch alle wichtigen vielgestaltigen Ergebnisse der modernen Theorie der zeitlich homogenen einfachen endlichen Markoffschen Ketten (wo X nur aus endlich vielen Punkten besteht; vgl. hierzu das in dies. Zbl. 18, 413 ref. Buch von Fréchet). Von weiteren bekannten Resultaten sind u. a. die in dies. Zbl. 9, 264 und 16, 312 und 379 ref. Ergebnisse von Fréchet, Kryloff und Bogoliouboff in denen des Verf. enthalten. — Für weitere Einzelheiten muß leider auf das Original verwiesen werden, da die schwierigen Formulierungen eine präzise kurze Wiedergabe unmöglich machen. *W. Feller.*

Stumpf †, Carl: Studien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1938, Nr 2, 1—59 (1938).

Erste Abhandlung. In einer Urne befinden sich m weiße und schwarze Kugeln; bei Voraussetzung I werden die $m+1$ möglichen Mischungsverhältnisse, bei Voraussetzung II hingegen die 2^m Kombinationen als gleichwahrscheinlich betrachtet. Nach n Ziehungen (mit oder ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln) ergeben sich nach (I) und (II) verschiedene Folgerungen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten, die hier verglichen werden. Zweite Abhandlung. Verschiedene Probleme über die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens, in einer Reihe von N Versuchen, von Iterationen von n ($n \leq N$) Gliedern.

Bruno de Finetti (Trieste).

Gumbel, E. J.: Gli eventi compatibili. Giorn. Ist. Ital. Attuari 9, 58—93 (1938).

In einem vorbereitenden Kapitel werden für eine Zufallsvariable x , mit den Werten $0, 1, \dots, n$ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, die Zusammenhänge

zwischen Potenzmomenten und den Faktoriellenmomenten $M_{(k)} = k! \sum_{x=k}^n \binom{x}{k} w(x)$ systematisch dargelegt und die Ungleichungen

$$1 - w(n) \leq \frac{\binom{n}{k} - \frac{M_{(k)}}{k!}}{\binom{n-1}{k-1}} \quad (*)$$

für $k=1, 2, \dots, n$ bewiesen. Den weiteren Betrachtungen wird folgendes Modell für einander nicht ausschließende Zufallsereignisse zugrunde gelegt: Eine Urne enthalte endlich viele Kugeln, von denen manche keine Nummer tragen, andere genau eine Nummer aus dem Nummernvorrat $1, 2, \dots, n$, andere zwei verschiedene Nummern, andere drei verschiedene usw., manche schließlich alle n Nummern. Eine Kugel wird gezogen und offenbar schließt das Erscheinen einer Nummer oder eines Nummernpaares das Erscheinen einer anderen Nummer oder eines anderen Nummernpaares usw. nicht aus, da eine Kugel mit mehreren Nummern gezogen werden kann. Es bedeute nun $p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_x)$ die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit den Nummern $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_x$ (und vielleicht auch noch anderen Nummern) zu ziehen, $w_n(x)$ die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit genau x Nummern zu ziehen; ferner sei $S_n(x) = \sum_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_x)} p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_x)$.

Mit Hilfe der Identitäten $w_n(x) = \sum_{\lambda=x}^n (-1)^{\lambda+x} \binom{\lambda}{x} S_n(\lambda)$ wird $M_{(k)} = k! S_n(k)$ bewiesen,

und daraus und (*) folgt $1 - p(1, 2, \dots, n) \leq \frac{\binom{n}{k} - \sum p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)}{\binom{n-1}{k-1}}$ für $k=1, \dots, n$.

Für $k=1$ folgt daraus die Boolesche Ungleichung. — Die allgemeine Theorie wird auf verschiedene Einzelfälle angewendet, u. a. wird die Renkontreaufgabe und eine Serie von Wünschelrutenexperimenten behandelt, wobei sich Zusammenhänge mit der Poissonschen Verteilung (Gesetz der kleinen Zahlen) ergeben. *Birnbaum.*

Pearson, E. S.: The probability integral transformation for testing goodness of fit and combining independent tests of significance. Biometrika 30, 134—148 (1938).

If y is the probability that a continuous random variable is $\leq x$, it is well-known that the probability law for y is rectangular. This paper is concerned with tests of

significance which may be based on this fact, both of the goodness of fit type in the case in which the observations are all of the same variate, and of the type arising from the combination of several independent tests of significance in which the variables observed obey different frequency laws. Criteria put forth by K. Pearson [Biometrika 25, 379—410 (1933); this Zbl. 8, 123] and a modification of them due to P. V. Sukhatme (this Zbl. 13, 175) are critically discussed and it appears to the author that further progress is possible only by specification of the hypotheses alternative to the one being tested. Neyman has pointed out how to calculate the probability of a y on the hypotheses H_0 if an alternative hypothesis H_1 be true. If H_0 is the hypothesis that the random variable is distributed normally with zero mean and unit variance, the graphs of the distribution of y is shown in cases in which H_1 corresponds to a shift in the mean, a change in the variance, or the introduction of skewness. Pearson Type I curves may be used to graduate these curves, and in such situations (of the goodness of fit type) the author advances the use of the Neyman-Pearson λ -criterion which provides a uniformly most powerful test. Finally the author discusses Neyman's recently developed "smooth tests" of goodness of fit (this Zbl. 18, 34) which relate to this same problem.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Olds, Edwin G.: A moment-generating function which is useful in solving certain matching problems. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 407—413 (1938).

The author develops a moment-generating function, with explicit expressions for the first four moments for the theoretical distribution of correct matchings in the case of a target deck with t distinguishable sets of s cards each, the cards of each set being identical. The generating function for factorial moments is shown to be a permanent of a simple square array (as the term has been employed in connection with the definition of determinants). The general expression for the m th derivative of this permanent is obtained and the first four moments about the mean are thereby obtained. The work generalizes and extends special results due to T. C. Fry, R. A. Fisher, D. W. Chapman, J. A. Greenwood, T. E. Sterne, E. V. Huntington, and C. E. Kellogg.

Albert A. Bennett (Providence).

Yule, G. Udny: On some properties of normal distributions, univariate and bivariate, based on sums of squares of frequencies. Biometrika 30, 1—10 (1938).

Carrying out a hint found in lectures by Karl Pearson given in 1894, the author considers the estimate $N_1^2/(2\sqrt{\pi}N_2)$ for σ obtained in a normal distribution for which N_1 is the total frequency, and N_2 is the sum of the squares of the class frequencies. In the case of platykurtosis, even to the extent of a single rectangular distribution, the agreement is close. For leptokurtic and for U-shaped distributions, this estimate for which the name „concentration“ is proposed, may differ markedly from σ . For bivariate distributions the corresponding measure is shown to be unsatisfactory as a method of estimating a correlation coefficient.

Albert A. Bennett (Providence).

Welch, B. L.: On tests for homogeneity. Biometrika 30, 149—158 (1938).

The familiar E^2 test for homogeneity of samples is based upon the assumption of an infinite universe not departing seriously from normality. The author considers the theory for the limited universe generated by merely repartitioning the aggregate of all the samples. This is made the basis for reconsidering the case of an infinite universe, but one not necessarily normal. Various cases are considered according to the magnitude of the indices involved. As a special case the Chi-square test for homogeneity of binomial series is examined. Its inadequacy for small samples is explained and discussed and the E^2 test is shown to be useful for judging the significance of the index of dispersion, D . The exact expression for the variance of D is obtained.

Albert A. Bennett (Providence).

Lawley, D. N.: A generalization of Fisher's z test. Biometrika 30, 180—187 (1938).

Given two independent samples of n_1 and n_2 observations from the same multivariate normal population, a quantity v^2 is defined as the sum of the products of the

second order moments in the one sample by the corresponding elements in the determinant reciprocal to the determinant of second order moments in the other sample. It is shown that a simple function of v^2, \bar{Z} is distributed in Fisher's z -distribution, thus providing a new and convenient significance test in cases in which two independent sets of estimates of variances and covariances are at hand. A numerical illustration is worked out. In the final section it is shown that the \bar{Z} -distribution found may be used to test the significance of the composite regression of a set of dependent variates on a set of independent variates. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Kendall, M. G.: A new measure of rank correlation. *Biometrika* 30, 81—93 (1938).

In place of Spearman's coefficient, ρ , of rank correlation the author proposes the coefficient, τ , obtained as follows. Consider the objects assigned with an objective order indicated by the successive natural numbers up to n . The ranking being examined is then a permutation of these first n numbers. Of the $\binom{n}{2}$ ordered pairs in this arrangement, let Σ designate the "score", which is the difference between the number of pairs occurring in natural order and the number in inverted order. Then $\tau = \Sigma / \binom{n}{2}$. Short methods of computing τ are explained. In every case $-1 \leq \tau \leq 1$. The distribution of τ not only tends to normality for increasing n but is close to normal for even n small, in contrast to ρ . The standard error of τ is asymptotic to $2/(3\sqrt{n})$. *Albert A. Bennett*.

Brelot: Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie. II. Extrait du Bull. Trav. publ. Stat. Aquicult. et Pêche Castiglione 32 pag. (1937).

This paper continues the discussion previously started [see this Zbl. 14, 169 (1936)]. The contrast is emphasized for an assumed normal ("Gaussian") distribution between results based on posterior probability (G_p) with standard deviation determined by observation of a sample, and that based on anterior probability (G_a) with standard deviation of the population assumed known in advance. Several brief tables are given showing values of n which yield given high percentages for the probability. Practical unilateral limits of the standard deviation are computed for both assumptions. The results are extended to an arbitrary unimodal distribution by comparing it with a normal law having the same area over a given central interval. A simple rough estimate of the grouping error is obtained, on the basis of a 99.9% probability, for $n \geq 21$.

Albert A. Bennett (Providence).

Cochran, W. G.: Problems arising in the analysis of a series of similar experiments. *J. Roy. Statist. Soc.* 4, Suppl., 102—118 (1937).

This paper is concerned with the statistical analysis suitable to experiments which give, at each of a number of different centres or different times, an estimate, say x_i , of a treatment effect, and an estimate, say s_i , of its standard error, based on n degrees of freedom. Such data may arise in many types of research, including series of agricultural field experiments or factory experiments on quality control. The main problems are concerned with the estimation and tests of significance of the mean treatment effect, and its variation from centre to centre. If the standard deviations of samples, s_i , are all estimates of the same σ , the analysis of variance gives a well known method of treatment. The present paper gives a discussion of the estimation of the mean response, and the test of significance of the interaction of the response with centres, in certain cases in which it is not assumed that the standard errors are equal.

H. L. Rietz (Iowa City).

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

Hagstroem, K. G.: Su alcune uozioni fondamentali dell'economia matematica. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 9, 191—213 (1938).

Zwischen den Vektoren der Ebene seien zwei Operationen (Addition und Multiplikation) definiert, die assoziativ, kommutativ und distributiv sind. Dies führt dann zu analogen Kombinationen von zwei zweidimensionalen stochastischen Veränderlichen.

Verf. betrachtet teils solche Kombinationen und teils Punkttransformationen der Ebene bzw. der stochastischen Veränderlichen. Diese Begriffsbildungen werden auf ökonomische Fragen angewandt. Z. B. wird der Bernouillische Begriff des moralischen Wertes als Transformation der „Preise“ aufgefaßt. Bei dem einfachen Tausch zweier Waren-gattungen werden die getauschten Warenmengen durch eine zweidimensionale stochastische Veränderliche dargestellt, und die Ebene der Preise wird auf eine der Werte abgebildet.
W. Feller (Stockholm).

Acosta, Jorge: Studien über die transzendenten Gleichungen, die bei der Berechnung von Darlehen auftreten. *Rev. Acad. Colomb. Ci. exact. etc.* 2, 9—12 (1938) [Spanisch].

Mazzoni, P.: Sulle proprietà delle funzioni fondamentali della matematica attuariale. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 9, 104—118 (1938).

Im diskontinuierlichen Bereiche wird die Abhängigkeit der jährlichen Prämien und der Prämienreserven vom Zinsfuß untersucht. Insbes. wird für Versicherungen mit konstanter Jahresprämie, mit Ausnahme der Versicherung mit festem Zahlungstermin, folgendes bewiesen: Für jede Versicherungsart, für welche die Reserve ${}_tV_x$ am Anfang und am Ende der Prämienzahlungsdauer $0 \leq t \leq n$ vom Zinsfuß unabhängig ist, ferner auch für die lebenslängliche Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung, ist a) die Bedingung ${}_tV_x \geq 0$ für $0 \leq t \leq n$ hinreichend, damit die jährliche Prämie mit steigendem Zinsfuß abnimmt, b) das Zunehmen von ${}_tV_x$ mit t ist hinreichend dafür, daß ${}_tV_x$ mit steigendem Zinsfuß abnimmt.
Birnbaum.

Medolaghi, Paolo: Sui fondamenti matematici dell'assicurazione contro i danni della grandine. *Atti Ist. naz. Assicuraz.* 10, 119—147 (1938).

Ringh, K. de: Über die Makehamsche Funktion. *Verzekeerings-Arch.* 19, (57)—(66) (1938) [Holländisch].

Ten Pas, W. G. J.: Über die Grundlagen einer mathematischen Statistik der Sterblichkeit. *Verzekeerings-Arch.* 19, 33—51 (1938) [Holländisch].

Die Sterblichkeitsquotienten $q_x = d_x : l_x$ werden für eine Reihe von aufeinanderfolgenden Jahren (1910—1930) auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate durch eine lineare Funktion der Zeit angenähert.
van der Waerden (Leipzig).

Numerische und graphische Methoden.

● **Jahnke, Eugen, und Fritz Emde:** Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 3. neubearb. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1938. XII, 305 S. u. 181 Fig. geb. RM. 15.—.

This useful book has been enlarged by the addition of formulas and graphs of Mathieu functions and confluent hypergeometric functions. More than half of the book is devoted to Bessel functions and allied functions. This plan is justified on account of the frequent occurrence of such functions in many branches of applied mathematics. The new tables of Lommel-Weber functions and Struve functions of orders 0 and 1 are then very welcome. — In the theory of special functions the problem of notation is becoming more and more difficult. By using the English, German and Greek alphabets the authors have been able to introduce some distinctions in notation as in the theory of Legendre functions. The extended use of the factorial notation is one feature of the book. — The results of a vast amount of work are presented very compactly and the diagrams enable one to visualise the behavior of a function of two variables in certain cases.
H. Bateman (Pasadena).

Tallqvist, Hj.: Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos \Theta)$. *Acta Soc. Sci. Fennicae, N. s. A*, 2, Nr 11, 1—43 (1938).

Aitken, A. C.: Studies in practical mathematics. III. The application of quadratic extrapolation to the evaluation of derivatives, and to inverse interpolation. Proc. roy. Soc. Edinburgh 58, 161—175 (1938).

Verf. setzt die Untersuchungen einer früheren Arbeit (II. vgl. dies. Zbl. 17, 147) über die Umwandlung der Newtonschen Interpolationsformeln für die Zwecke der Rechenmaschine (quadratische Mittelbildung zwischen linearen Mitteln) fort und wendet die Methode an zur Berechnung der sukzessiven Ableitungen einer Tabellenfunktion und zur inversen Interpolation, indem auch bei letzterer die linearen Mittel quadratisch interpoliert werden. Es folgen einige Genauigkeits- und Konvergenzbetrachtungen.

E. Bodewig (Basel).

Camp, Kingsland: Notes on interpolation. I. Subtabulation, or subdivision of intervals: A survey and appraisal of methods. (Equal intervals, and functions of single arguments.) Trans. Actuar. Soc. Amer. 38, 16—34 (1937).

The author reviews different types of osculatory interpolation formulae for use in the subdivision of intervals with special reference to their usefulness with actuarial data. There is a briefer discussion of the device of the adjustment of central difference formulae by the least squares principle. Numerical illustration and comparison is afforded by the graduation of the same data by twelve different methods. In the last part of the paper, with reference to multivariate polynomial interpolation, the use of open determinants is described and their advantage in the numerical work occasioned by the addition of terms to the polynomial being used is pointed out.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Hitchcock, Frank L.: Finding complex roots of algebraic equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 17, 55—58 (1938).

$f(x) = 0$ habe die Wurzel $p_1 + iq_1$. Durch Reduzierung der Wurzeln um p_1 bzw. p erhält f die Form $f(x) = (x^2 + q)A + B$, wo $B = \alpha x + \beta$ und α, β den Teiler $q - q_1$ bzw. eine reelle Zahl, deren Vorzeichen beim Überschreiten von p über p_1 wechselt, haben. Daraus und aus dem Nullsetzen des linearen Teilers beim euklidischen Algorithmus läßt sich ein Näherungswert für $p_1 + iq_1$ finden, der nach Newton verbessert werden kann.

E. Bodewig (Basel).

Gentini, Gervasio: Alcune formole notevoli per il calcolo delle equazioni differenziali. Ric. Ingegn. 6, 34—36 (1938).

Durch die Auffassung des Differentialquotienten als Differenzenquotient und Anwendung des Rolleschen Satzes werden zwei sehr einfache, praktische Formeln abgeleitet, die zur angenäherten, numerischen Integration von linearen Differentialgleichungen $y' = py + q$ dienen. Die Fehlerabschätzungen werden angegeben und der Vorgang für ein Beispiel durchgeführt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Frazer, R. A., W. P. Jones and Sylvia W. Skan: Approximations to functions and to the solutions of differential equations. Aeronaut. Res. Comm., Rep. Nr 1799, 1—33 (1937).

Ausführliche Behandlung der Methoden, die die Verff. bereits in einer kurzen Mitteilung dargestellt haben. Es werden drei Näherungsmethoden miteinander verglichen: Bei der ersten (method of collocation) wird allgemein der Fehler an gegebenen Stellen vorgeschrieben (z. B. überall Null), die zweite beruht auf der Methode der kleinsten Quadrate, die dritte ist eine Methode von Galerkin. Der erste Teil behandelt lineare Probleme. In mehreren Tabellen und Figuren werden näherungsweise Darstellungen einfacher Funktionen und Lösungen linearer Differentialgleichungen verglichen. Im zweiten Teil werden kurz die Schwierigkeiten besprochen, die bei nicht-linearen Aufgaben auftreten. Gezeigt wird u. a.: Wird die Zahl der verfügbaren Konstanten vergrößert, so konvergieren die Darstellungsfolgen der drei Methoden gegen denselben Grenzwert, oder sie divergieren sämtlich. Die Methode von Galerkin konvergiert am besten.

Rehbock (Bonn).

Bailey, V. A., and J. M. Somerville: The graphical solution of ordinary differential equations. *Philos. Mag.*, VII. s. 26, 1—31 (1938).

Es werden graphische Methoden für Differentialgleichungen vom Typus $A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 = 0$ mit vorgegebenen Anfangsbedingungen zusammengestellt. Die A_k ($k = 0, 1, \dots, n$) sind zunächst Funktionen von x und y , dann Funktionen von $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Schließlich wird das Glied mit $y^{(n)}$ durch eine Funktion von $y^{(n)}$ ersetzt. Für diese drei Fälle werden zahlreiche Beispiele durchgeführt, die bei physikalischen Problemen auftreten. *Rehbock (Bonn).*

Heinrich, Helmut: Ein abbildungsgeometrisches Verfahren zur Darstellung von Richtungsfeldern und zur Erzeugung von Tangentenverwandtschaften. *Deutsche Math.* 3, 353—389 (1938).

Für Differentialgleichungen erster Ordnung lassen sich auf zeichnerischem Wege Richtungsfelder gewinnen. Im ersten Abschnitt werden bekannte Verfahren (graphische Quadratur, Verfahren von Czuber, Mehmke, Sobotka) mit Beispielen erläutert, im zweiten und dritten Abschnitt wird eine naheliegende allgemeine Abbildungsmethode entwickelt. Dabei wird die rechte Seite der Differentialgleichung in geeigneter Weise umgeformt. Im vierten Abschnitt wird mit Hilfe des gewonnenen Verfahrens die Erzeugung der Tangentenverwandtschaft ebener Kurvenscharen behandelt. Endlich werden im fünften Abschnitt solche Differentialgleichungen herangezogen, deren Richtungsfeld durch zwei zur x - y -Ebene projektive Felder dargestellt wird. Ausführliche Literaturangaben werden gemacht. *Rehbock (Bonn).*

Blaum, Ott-Heinrich: Die Darstellung von Tschebyscheff-Funktionen beliebiger Ordnung mittels der Lissajous-Figuren. *Z. techn. Physik* 19, 187—194 (1938).

Lissajousfiguren entstehen durch Zusammenstellung zweier entlang senkrecht zueinanderstehenden Achsen stattfindenden periodischen Bewegungen mit beliebigem Frequenz- und Phasenunterschied. Verf. betrachtet zunächst die bekannten Sonderfälle gleicher Frequenz: Gerade, Kreis und Ellipse. Im Falle ungleicher Frequenz entstehen Kurven höherer Ordnung, welche als Projektionen einfacher Raumkurven dargestellt werden können. Als Raumkurven kommen Sinuskurven auf einer Kreiszylinderoberfläche in Frage. Verf. führt die Tschebyscheffpolynome in der üblichen Weise als Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein und zeigt, daß diese Polynome zur Darstellung allgemeiner Lissajousfiguren verwendet werden können. Er geht ausführlich auf die numerische Berechnung der verschiedenen Tschebyscheffpolynome ein und erläutert sodann die zeichnerische Bestimmung dieser Polynome sowie die Beziehungen zu den entsprechenden Lissajousfiguren. *M. J. O. Strutt.*

Geometrie.

Menger, Karl: Axiomatique simplifiée de l'algèbre de la géométrie projective. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 308—310 (1938).

Axioms for developing projective geometry from the point of view adopted by the author, F. Alt and O. Schreiber in an earlier, joint paper (this Zbl. 14, 76 and 16, 268) are given with a brief indication of the development based on them. This development follows closely the earlier treatment, but presents an interesting body of theory based on the first three axioms which, except for a modification in the second, are the same as the first three postulates of the former paper mentioned (it is an assumption of the reviewer that the present Axiom III, which has a misprint in its second part, is intended to be the same as the third postulate of the earlier paper). Four more axioms are introduced as required. *J. L. Dorroh (Marion).*

Steek, Max: Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien. I. (Eine geometrische Deutung der zyklischen Gruppen.) *J. reine angew. Math.* 179, 37—64 (1938).

A system of transformations in finite projective planes, called "real incidence ce-

mappings" and defined geometrically, correspond to collineations in the ordinary projective plane. Their study, based solely on incidence relations, reveals that in terms of their systems of fixed elements they fall into seven types instead of the six types of R. Baldus (S.-B. Bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Abt. **1928**, 375—376) for collineations in ordinary projective geometry. A cyclic transformation without fixed elements [cf. J. Singer, Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 377—385 (1938); this Zbl. **19**, 5] is without analogue among collineations in the ordinary projective plane. Other distinctions from ordinary collineations appear in particular finite planes. The complete system of real incidence-mappings in the plane with seven points (three on each line) is presented and analysed. Implications concerning group theory and the axiomatic foundation of geometry are remarked.

J. L. Dorroh (Marion).

Finsler, P., und H. Hadwiger: Einige Relationen im Dreieck. Comment. math. helv. **10**, 316—326 (1938).

Man lege an die Seiten eines Dreiecks D gleichseitige Aufsatzdreiecke. Die drei Schwerpunkte der Aufsatzdreiecke auf entgegengesetzter bzw. auf gleicher Seite bilden bekanntlich gleichseitige Dreiecke D_1 und D_2 . Ist F die Fläche des Dreiecks und $S = a^2 + b^2 + c^2$, so gelten folgende Relationen: $F_1 - F_2 = F$; $S_1 + S_2 = S$; $S + 4\sqrt{3}F = 8\sqrt{3}F_1$; $S - 4\sqrt{3}F = 8\sqrt{3}F_2$. Aus der letzten folgt insbesondere die Ungleichung von Weitzenböck: $S - 4\sqrt{3}F \geq 0$. Es gilt auch die Verschärfung $S - 4\sqrt{3}F \geq Q$, wo $Q = t_2(a - b)^2$. Für den Umfang u des Dreiecks D gilt: $u^2 - 2Q - 12\sqrt{3}F \geq 0$. Ist kein Winkel im Urdreieck größer als $\frac{2\pi}{3}$ und m das vorhandene Minimum der Distanzsumme eines Punktes von den Eckpunkten, so gilt $m^2 = S_1$ und $m^2 \leq ab + bc + ca$. Ist N das Minimum der Quadratsumme der Abstände eines Punktes von den Seiten, so ist $N = \frac{F^2}{(F_1 + F_2)\sqrt{3}}$. Wird die Fläche des

größten umbeschriebenen gleichseitigen und gleich bzw. entgegengesetzt orientierten Dreiecks mit U_1 bzw. U_2 bezeichnet, so hat man $U_1 = 4F_1$, $U_2 = 4F_2$. Für die Flächen J_1 und J_2 der kleinsten einbeschriebenen Dreiecke gilt $J_1 = \frac{F^2}{4F_1}$, $J_2 = \frac{F^2}{4F_2}$.

Die Verff. betrachten auch den Fall, wo die Aufsatzdreiecke nur ähnlich sind; D_1 und D_2 sind dann zu den Aufsatzdreiecken ähnlich. Es gilt ebenfalls $F_1 - F_2 = F$; weiter hat man: D_1 und D_2 haben denselben Höhenschnittpunkt; der Schwerpunkt von D liegt in der Mitte zwischen denjenigen von D_1 und D_2 . Sind D_1 und D_2 gleichseitig, so fallen die drei Schwerpunkte zusammen.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Waerden, B. L. van der: Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden. J. reine angew. Math. **179**, 65—68 (1938).

In einer Arbeit des gleichen Titels (s. dies. Zbl. **16**, 268) konnte H. Wolff das genannte Problem zurückführen auf eine Gleichung 10-ten Grades $F(t) = 0$ mit Koeffizienten aus $R(a_2, a_3, a_4)$; $R = \text{rat. Zahlkörper}$, $a_2 = v_\alpha^{-2} + v_\beta^{-2} + v_\gamma^{-2}$, $a_3 = v_\alpha^{-1}v_\beta^{-1}v_\gamma^{-1}$, $a_4 = v_\alpha^{-2}v_\beta^{-2} + v_\beta^{-2}v_\gamma^{-2} + v_\gamma^{-2}v_\alpha^{-2}$; $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma = \text{Länge der in den Ecken des Studyschen Dreiecks auf den eindeutig erklärten Winkelhalbierenden errichteten Lote bis zum Schnitt mit den Gegenseiten}$. Wolff zeigte, daß $F(t)$ in $R(a_2, a_3, a_4)$ irreduzibel ist [nicht in $R(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$, wie versehentlich im oben zitierten Referat angegeben], mußte aber die Frage nach der Gruppe und der algebraischen Auflösbarkeit von $F(t) = 0$ offen lassen. In der vorliegenden Arbeit wird dieses restliche Problem gelöst; und zwar zeigt sich, daß die Gruppe \mathfrak{G} von $F(t) = 0$ bez. $R(a_2, a_3, a_4)$ die symmetrische \mathfrak{S}_{10} ist. Dazu wird festgestellt: \mathfrak{G} ist primitive und transitive Permutationsgruppe, welche eine Transposition enthält. — Beim Übergang von $R(a_2, a_3, a_4)$ zu $R(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ als neuen Grundkörper ist lediglich eine Reduktion der Gruppe \mathfrak{S}_{10} auf die alternierende \mathfrak{A}_{10} möglich, denn $[R(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma) : R(a_2, a_3, a_4)] = 6$ und \mathfrak{S}_{10} hat außer der vollen Gruppe und \mathfrak{A}_{10} keine Untergruppe von einem Index ≤ 6 .

Grunwald (Göttingen).

● **Klee, R.:** Über die einfachen Konfigurationen der euklidischen und der projektiven Ebene. Dresden: Focken & Oltmanns 1938. 67 S. u. 44 Fig. RM. 3.—.

Es werden die topologisch verschiedenen Zerlegungen der euklidischen und der projektiven Ebene untersucht, die durch n sich paarweise in lauter verschiedenen Punkten schneidende Geraden erzeugt werden (einfache Konfigurationen). Mittel der Untersuchung ist das Rhombenpolygon, eine zur Ebenenzerlegung duale Figur, die metrisch so spezialisiert ist, daß die den Schnittpunkten der euklidischen Ebene dual entsprechenden Vierecke als Rhomben erscheinen. Die Berandung des Rhombenpolygons ist ein reguläres $2n$ -Eck; seine Eckpunkte entsprechen den sich ins Unendliche erstreckenden Zellen. Den Geraden entsprechen „Wege“, d. h. Systeme von Rhomben mit einer Schaar paralleler Seiten. Die Überstreichung eines Schnittpunktes durch eine dritte Gerade hat eine einfache Darstellung im Rhombenpolygon (Sechsecksänderung). Im Falle der projektiven Ebene tritt an die Stelle des Rhombenpolygons eine aus 2 spiegelbildlichen, am Rande zusammengehefteten Rhombenpolygonen zusammengesetzte Figur. Diese ist dual zu einer sphärischen, der projektiven Ebene 2mal überlagerten Zellteilung. Jeder einfachen Konfiguration entspricht eine derartige rhombische Figur, und zwar kann man diese aus einer speziellen Figur durch wiederholte Sechsecksänderung erzeugen. Daß hiervon auch die Umkehrung gilt und daher jede einfache Konfiguration von Pseudogeraden sich durch gerade Linien realisieren läßt, wird vom Verf. bejaht, doch ist die Beweisführung für den Ref. nicht völlig überzeugend. Wenn die Behauptung zutrifft, sind die Schnittpunktsätze der ebenen Geometrie ohne Einfluß auf die einfachen Konfigurationen; andernfalls sind die nach den hier entwickelten Methoden bestimmbaren Anzahlen der verschiedenen einfachen Konfigurationen nur obere Schranken; doch sind für kleine Werte von n keine Abweichungen zu erwarten. Anzahlbestimmungen: 7, 6, 1 für $n = 5$; 79, 43, 4 für $n = 6$; 1765, 922, 11 für $n = 7$. Die beiden ersten Ziffern beziehen sich auf die euklidische Ebene (je nachdem spiegelbildliche Figuren als nichtäquivalent oder äquivalent gerechnet werden), die dritte auf die projektive Ebene. *Friedrich Levi* (Calcutta).

● **Coxeter, H. S. M., P. du Val, H. T. Flather and J. F. Petrie:** The fifty-nine isocahedra. (Univ. of Toronto Stud., Math. Ser. Nr. 6.) Toronto: Univ. of Toronto press 1938. 26 S. \$ 1.—.

The authors numerate and describe the polyhedra that can be derived from the five Platonic solids by "stellation", that is by extending the faces until they meet again, always preserving the rotational symmetry of the original solid. After the work done by Kepler, Poinsoot, Cauchy and others, the only solid whose stellations remained to be investigated, was the icosahedron. The exhaustive enumeration gives 59 types, 32 possessing at least one plane of symmetry and 27 enantiomorphous pairs. — The study contains 20 beautiful plates with first-rate drawings of the various figures considered.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Fournier, Georges: La division régulière de l'espace et la structure de la matière. I. J. Phys. Radium, VII. s. 9, 273—281 (1938).

Verf. behandelt das Problem der regulären Raumteilung, indem er aus den zu konstruierenden Wirkungsbereichen auf die Struktur der Atome zu schließen hofft. Vorerst wird nur die reguläre Teilung um einen fixen Punkt 0 herum, mit anderen Worten die regulären Polyeder in extenso untersucht und Formeln zur Berechnung wichtiger Größen dieser Polyeder aufgestellt.

W. Nowacki (Bern).

Miyazaki, Sadataka: Die Sätze von drei Kreisen der nichteuklidischen Geometrie. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 341—349 (1938).

Nach Erklärung der Begriffe der „gleichartigen Doppelberührung“ von Kurven zweiter Ordnung und der „Doppelberührung“ von Geraden beweist Verf. drei Sätze über die Berührung von Kreisen der nichteuklidischen Geometrie. Nimmt man deren Inhalt als Aussagen über Kurven zweiter Ordnung der projektiven Geometrie, so ist folgendes Ergebnis gewonnen worden: Drei Paare gemeinsamer Tangenten von je zweien

dreier Kurven 2. Ordnung schneiden sich in drei kollinearen Punkten. Nimmt man statt eines Paares gemeinsamer Tangenten oder statt der drei Paare, ein Paar zu ihm entsprechender bzw. drei Paare zu ihm entsprechender gemeinsamer Tangenten an, so gehen die drei Verbindungsgeraden der drei Paare von Gegenecken des von den drei Paaren gemeinsamer Tangenten gebildeten Sechsecks durch einen Punkt.

Steck (München).

Garnier, René: Extension de la formule d'Euler-Savary au mouvement le plus général d'un solide. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 115—117 (1938).

Garnier, René: Extension de la formule d'Euler-Savary au mouvement le plus général d'un solide. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 271—273 (1938).

Soit q une droite du complexe linéaire lié avec le mouvement hélicoïdal tangent H du mouvement le plus général Γ d'un système rigide dont S est une surface normale à g au point M , et S_1 l'enveloppe de S dans le système fixe. Comme l'analogie de la formule d'Euler-Savary l'A. se propose de trouver une relation Λ entre les éléments de courbure $r, s, t, rt - s^2$ de S et r_1, \dots de S_1 , en postulant qu'une «véritable généralisation de la f. d'E.-S. doit être applicable à toutes les surfaces normales à une même droite g ». Doutant de la possibilité d'une telle généralisation G. Koenigs [J. Math. pures appl. 6. s. 8, 103—158 (1912)] n'avait abordé ce problème que sous des restrictions. L'A. s'en débarrasse et en constatant que c'est une transformation de contact qui fait passer de chaque S à la S_1 resp., il obtient pour Λ une homographie. Si l'on représente les éléments de Γ à l'aide d'un repère mobile (origine M , axe des $z = g$) comme d'habitude $[\xi, \eta, \zeta (= 0)]$ composants de la vitesse de M ; p, q cos de direction de l'axe d'une rotation, passant par M , alors Λ peut s'écrire

$$(r_1 - r)/A^2 = (s_1 - s)/AB = (t_1 - t)/B^2 = -1/(\zeta' + A\xi + B\eta), \quad (1)$$

$$A = r\xi + s\eta + q, \quad B = s\xi + t\eta - p.$$

Par une dilatation préalable on peut transporter le point de contact M dans le pied de la perpendiculaire commune (= axe des x) de g et de l'axe de H ; ce qui donne $p = \xi = 0$ et au lieu de (1), avec $\tilde{s} = s = \tilde{s}_1 - s_1 = q/\eta$,

$$(r_1 t_1 - \tilde{s}_1^2)/t_1 = (rt - \tilde{s}^2)/t, \quad \tilde{s}_1/t_1 = \tilde{s}/t, \quad 1/t_1 - 1/t = \eta^2/\zeta'. \quad (2)$$

Il s'ensuit que Λ a les diviseurs élémentaires $1, 1, \lambda - \zeta', (\lambda - \zeta')^2, (\lambda - \zeta')^2$ et le déterminant ζ'^5 . — La seconde Note indique diverses applications: 1. Cas du roulement des axoïdes, 2. Cas où S, S_1 sont des réglées tangentes le long d'une génératrice variable, 3. Roulement de deux surfaces non nécessairement conjuguées. (Quant à 2. et 3. la méthode employée fournit aussi des résultats spéciaux de M. Disteli, G. Koenigs, H. Resal.) — En outre l'A. établit une transformation Γ^* qui associe à un point quelconque une ellipse, et qui jouit de la propriété suivante remarquable: Entre les éléments de courbure de deux surfaces S, S_1 normales à g , conjuguées ou par la transformation de contact Γ^* ou par Γ , il y a la même relation Λ . Si H est une translation les ellipses susdites deviennent cercles à rayons égaux. Anton E. Mayer (Wien).

Analytische und algebraische Geometrie:

Venkataraman, B. R., and A. Narasinga Rao: The infinitesimal flow on the projective plane. J. Annamalai Univ. 7, 194—198 (1938).

Die Note untersucht das von den infinitesimalen Transformationen der projektiven Gruppe G_8 der Ebene erzeugte Geschwindigkeitsfeld V . Dabei ergibt sich, daß der geometrische Ort der Punkte, für die $\text{div } V$ konstant ist, ein System von Parallelen und der Ort der Punkte, für die $\text{rot } V$ konstant ist, ein anderes, zum ersten orthogonales System von Parallelen ist. Hat die betrachtete projektive Transformation die Fixpunkte A, B, C , so ist der geometrische Ort der Punkte, für die der Vektor V einer festen Geraden parallel ist, ein durch A, B, C gehender Kegelschnitt, dessen eine Asymptote zu der festen Geraden, dessen andere zu derjenigen Geraden parallel ist, längs der (d. h. längs ihrer Punkte) $\text{div } V$ verschwindet. — Die Ergebnisse werden dann auf den n -dimensionalen Raum ausgedehnt. Steck (München).

Hackmüller, E.: Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkts- und Mittelpunktskurve. *Z. angew. Math. Mech.* 18, 252—254 (1938).

Die Gleichungen und bekannte Eigenschaften dieser Kurven werden in der Gaußschen Ebene ausführlich entwickelt. Inzidiert ein Punkt der bewegten Ebene $\{z\}$ in 4 vorgegebenen Augenblicken der Bewegung mit den Punkten z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 der festen Ebene $\{z'\}$, so liegt z dann auf der Kreispunktskurve K , wenn durch $z'_1 \dots z'_4$ ein Kreis geht. Bezeichnet p_{hk} einen Drehpol, nämlich den einzigen Punkt w , für den $w'_k = w'_k (= p'_{hk})$ ist, und wird die Neigung des Punktfeldes $\{z'_k\}$ etwa durch $\varepsilon_k = l'_k - 0'_k$ festgelegt, so ist ersichtlicherweise (*) $z'_k - z'_h = (\varepsilon_k - \varepsilon_h)(z - p_{hk})$. Ref. zeigt, wie nun die Ergebnisse des Verf. in ein paar Zeilen hergeleitet werden können. Die Bedingung dafür, daß $z'_1 \dots z'_4$ ein Kreisviereck ist, lautet bekanntlich: $Dv(z'_1 z'_2 z'_3 z'_4) = Dv(z'_1 z'_2 z'_3 z'_4)$. Einsetzen aus (*) ergibt:

$Dv(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4) ((z - p_{13})/(z - p_{23})) : ((z - p_{14})/(z - p_{24})) = \text{konjug. Ausdruck}$ (und 2 analoge Gl.). Weil die ε auf einem (Einheits-) Kreis liegen, sind die Dv auf beiden Seiten gleich; streicht man sie, so entsteht die schon durch 4 Pole bestimmte Gl. von K . Sie ist für $z = p_{hk}$ erfüllt, da in diesem Fall das Quadrupel $z'_1 \dots z'_4$ auf ein Tripel zusammenschrumpft. In der Gestalt

$((z - p_{13})/(\bar{z} - \bar{p}_{13})) : ((z - p_{14})/(\bar{z} - \bar{p}_{14})) = ((z - p_{23})/(\bar{z} - \bar{p}_{23})) : ((z - p_{24})/(\bar{z} - \bar{p}_{24}))$ (*) erkennt man unmittelbar eine Winkelgleichheit. Die Mittelpunktskurve M ist als Ort der Mitte des Kreises $z'_1 \dots z'_4$ definiert. Die inverse Bewegung lehrt ohne weiteres, daß aus * die Gl. von M hervorgeht, wenn überall Akzente gesetzt werden. *Anton E. Mayer.*

Rangachariar, V.: On the nature of the conics of a four-line system which pass through a given point. *Math. Student* 5, 158—162 (1938).

Weiss, E. A.: Die elliptische Normalkurve sechster Ordnung als Tripelreihe. *J. reine angew. Math.* 179, 90—96 (1938).

Die Darstellung der ∞^7 trilinearen Verwandtschaften zwischen einstufigen Grundgebilden auf die Punkte eines Raumes S_7 kann mit der Theorie der elliptischen Normal- C^6 des S_5 in Verbindung gesetzt werden. Wesentlich ist die M_3^6 , deren Punkte die höchstsingulären Trilinearformen abbilden; die Bildpunkte von zwei Trilinearformen mit verschwindender Invariante sind in einem Nullsystem reziprok; die Gruppen einer trilinearen Verwandtschaft F werden auf die Punkte der M_3^6 abgebildet, wo M_3^6 von der dem Punkt F im Nullsystem entsprechenden Hyperebene geschnitten wird; M_3^6 ist eine Del Pezzo-Fläche. — Betrachtet man insbesondere in einer Ebene diejenige Verwandtschaft zwischen drei Ebenenbüscheln A, B, C , für welche drei beliebige entsprechende Geraden durch einen Punkt hindurchgehen, so erhält man wieder die übliche ebene Abbildung der Del Pezzo- M_3^6 ; diese hat einen Doppelpunkt, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen, und in diesem Falle ist die Sehnenmannigfaltigkeit M_3^6 der M_3^6 einfach der projizierende Kegel der Sehnenmannigfaltigkeit einer Veroneseschen Fläche. — Wenn nun M_3^6 mit einem S_5 geschnitten wird, so ist die Schnittkurve eine elliptische Normal- C^6 . Die S_6 durch S_5 schneiden M_3^6 in $\infty^1 M_3^6$, deren Sehnen- M_5 auf S_5 die M_4^3 eines Büschels schneiden; alle diese M_4^3 enthalten die Sehnen- M_3 der C^6 . Im S_6 -Büschel gibt es vier S_6 , deren M_3^6 doppelpunktig sind; entsprechend hat man die vier bekannten C^6 enthaltenden Veroneseschen Flächen. — Weitere Bemerkungen betreffen den Zusammenhang zwischen den ebenen Abbildungen der Veroneseschen Fläche und der Del Pezzo-Fläche mit Doppelpunkt und zwischen den Sechstupeln assoziierter Tripel und den Sechstupeln linear abhängiger Punktepaare. — Schließlich noch ein neuer Beweis der Eigenschaft, daß das Doppelverhältnis der vier zu den Veroneseschen Flächen der Kurve gehörigen Sehnen- M_4^3 das Doppelverhältnis der C^6 ist.

E. G. Togliatti (Genova).

Defrise, P.: Sur les courbes possédant une involution cyclique, hyperelliptique, sans point multiple. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 24, 437—444 (1938).

Die Ergebnisse einer früheren Untersuchung (dies. Zbl. 19, 41) werden hier be-

nutzt, um folgenden Satz zu beweisen: Wenn eine algebraische Kurve f eine zyklische fixpunktfreie Involution γ_n^1 enthält, und wenn diese γ_n^1 hyperelliptisch mit dem Geschlecht π ist, so enthält f auch weitere n hyperelliptische Involutionen γ_2^1 ; die Geschlechter dieser anderen Involutionen haben alle den Wert $\frac{1}{2}(n-1)(\pi-1)$, wenn n ungerade ist; wenn n eine gerade Zahl ist, verteilen sich die n Involutionen γ_2^1 auf 2 Gruppen von je $\frac{1}{2}n$ mit solchen Geschlechtern π_1, π_2 , daß $\pi_1 + \pi_2 = (n-1)(\pi-1)$. Der Beweis wird zunächst im Falle $n=2$ und dann für $n>2$ durchgeführt. Man zieht daraus, daß eine hyperelliptische (und nicht elliptische) Kurve f eine γ_n^1 der betrachteten Art nur dann enthalten kann, wenn $n=2$ ist; in diesem Falle gibt es $(\pi+1)(2\pi+1)$ Klassen hyperelliptischer Kurven, welche eine fixpunktfreie γ_2^1 enthalten, die auf eine gegebene hyperelliptische Kurve des Geschlechts π abbildbar ist.

E. G. Togliatti (Genova).

Milne, William P.: A triad of quadridnodal cubic surfaces containing a quadricubic curve. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 345—351 (1938).

Es sei Γ die Schnitt- C^6 einer Quadrik und einer F^3 ; es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier so beschaffene Dreitantentialebenen von Γ , daß ihre 12 Berührungspunkte mit Γ auf einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art liegen; die Paare $\alpha\delta, \beta\gamma; \alpha\gamma, \beta\delta; \alpha\beta, \gamma\delta$ liefern drei Paare von kubischen Raumkurven, die die Berührungspunkte von α und δ , von β und γ usw. enthalten; man weiß, daß solche drei C^3 -Paare auf drei viernodalen und durch Γ hindurchgehenden Flächen 3. Ordnung U, V, W liegen. Durch Projektion von Γ aus einem ihrer Punkte auf einer Ebene und Betrachtung der so gewonnenen C^6 und durch Anwendung eines früheren Satzes desselben Verf. beweist man zunächst, daß U, V, W einer rationalen Developpablen 4. Klasse Φ eingeschrieben sind. Umgekehrt wenn Φ gegeben ist und wenn $I=0, J=0$ die betreffenden harmonischen und äquianharmonischen Orte bedeuten, so ist $4\alpha^3 - I\alpha - J = 0$, wo α eine lineare Form ist, die Gleichung der allgemeinsten der gegebenen Developpable eingeschriebenen viernodalen F^3 . Die Rechnung wird in dualer Weise ausgeführt. Ersetzt man α durch drei Formen u, v, w , so daß $u+v+w \equiv 0$ ist, so erhält man die ganze ursprüngliche Konfiguration, denn die drei so konstruierten F^3 enthalten eine Raumkurve C^6 des Geschlechts 4. Es folgen verschiedene Eigenschaften und Beziehungen zwischen jener F^3 und Φ, I, J .

E. G. Togliatti (Genova).

Villa, M.: Sopra una classe di V_k situate sui coni di Veronese. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 217—221 (1938).

Verf. hatte an früherer Stelle [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 691—694 (1937); dies. Zbl. 17, 224] gezeigt, daß die einzigen V_k mit ∞^{3k-3} zu Quasiasymptotenkurven gehörige Linienelemente zweiter Ordnung V_k im R_{k+2} oder Kegel über der Veroneseschen Fläche sind. In dieser Arbeit wird nun bewiesen, daß jede V_k auf einem Veroneseschen Kegel des R_{k+4} , die von den R_{k-1} dieses Kegels in Mannigfaltigkeiten V_{k-2} geschnitten wird, ∞^{3k-4} derartige Linienelemente 2. Ordnung besitzt und daß umgekehrt die Veroneseschen Kegel unter allen Kegeln des R_{k+4} auch dadurch gekennzeichnet sind, solche V_k zu besitzen.

Burau (Hamburg).

Differentialgeometrie:

Knebelman, M. S.: Contact transformations. Ann. of Math., II. s. 39, 507—515 (1938).

Verf. betrachtet eine Hyperflächenschar eines n -dimensionalen Koordinatenraumes V_n , bezogen auf ein Koordinatensystem (x) , und daneben die nichtsinguläre Punkttransformation

$$T_m \begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i(x, p_\alpha, p_{\alpha\beta}, \dots, p_{\alpha_1 \dots \alpha_m}) \\ \bar{p}_{i_1 \dots i_k} = \bar{p}_{i_1 \dots i_k}(x, p) \end{cases} \quad k = 1, \dots, m$$

im Raum der Variablen $x^\alpha, p_\alpha, p_{\alpha\beta}, \dots, p_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$. Ist $p_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ ($k=1, \dots, m$) ein Berührungselement m -ter Ordnung der Hyperfläche $f(x)$, so gilt dies im allgemeinen nicht für eine vermöge T_m aus $f(x)$ entstandene Hyperfläche $\bar{f}(\bar{x})$. Gilt dies aber doch und immer, so spricht Verf. [mit Beschränkung auf nichtsinguläre Transformationen

$\bar{x}^i = x^i(x, p(x))$] von einer Berührungstransformation m -ter Ordnung. Gilt insbesondere für jede Hyperfläche f

$$p_{i_1, \dots, i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial \bar{x}^{i_1} \dots \partial \bar{x}^{i_k}},$$

so handelt sich es um eine „kanonische“ Berührungstransformation m -ter Ordnung. Eine solche erscheint als $(m - 1)$ -te Erweiterung einer gewöhnlichen Berührungstransformation (der Ordnung 1). Zusammengesetzt mit der „identischen“ Transformation

$$\bar{x}^i = x^i, \quad \bar{p}_i = k(x, p)p_i, \quad \bar{p}_{ij} = k(x, p)p_{ij} + k_i(x, p)p_j + k_j(x, p)p_i$$

(welche alle Elemente invariant läßt) ergibt eine kanonische Transformation die allgemeinste Berührungstransformation m -ter Ordnung. Sodann behandelt Verf. die allgemeinsten Berührungstransformationen in V_n für $(n - r)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten ($r > 1$) und erhält zusammen mit den vorhergehenden Ergebnissen das allgemeine Resultat: läßt eine Transformation die Berührung m -ter Ordnung zweier $(n - r)$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten in V_n invariant, so ist sie im wesentlichen für $r = 1$ durch die $(m - 1)$ -te Erweiterung einer Lieschen Berührungstransformation gegeben, für $r > 1$ durch die m -te Erweiterung einer Punkttransformation. *M. Pinl.*

Sbrana, F.: Sopra alcune questioni relative alle curve piane e sghembe. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 286—291 (1938).

Soit P_0 un point d'une courbe C , $P_1 P_2$ une corde de C parallèle à un plan fixe π tangent à C en P_0 , $P_0 P$ la perpendiculaire sur $P_1 P_2$. Si P_1 et P_2 se déplacent sur C de telle manière que $P_0 P$ à la limite va coïncider avec la tangente t de C en P_0 , la limite du rapport $4 P_0 P / P_1 P_2^2$ est égale à la courbure de C en P_0 . Si la droite $P_0 M$ divise $P_1 P_2$ dans le rapport $q \neq 1$ et la corde à la limite coïncide avec t , la position limite q de $P_0 M$ coïncide avec t si π est le plan osculateur de C ; elle coïncide avec la normale affine si π contient la binormale etc. *S. Finikoff (Moscou).*

Žitomirski, O. K.: Sur les surfaces à frontières d'ombre planes. Rec. math. Moscou, N. s. 3, 347—351 (1938) [Russisch].

L'auteur donne une démonstration nouvelle du théorème suivant: Les seules surfaces à frontières d'ombre planes sont les surfaces du second degré. La méthode employée s'appuie sur le théorème fondamental de la géométrie projective et n'exige que l'existence et la continuité des dérivées de deux premiers ordres (il en fallait trois au moins pour la validité des différentes démonstrations connues). *Autoreferat.*

Behari, Ram: Infinitesimal deformation of ruled surfaces. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 68—72 (1938).

Verf. gibt die allgemeinen Darstellungen einer Fläche S und einer Fläche, welche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht, in Asymptotenparametern von S . Dann wendet er die gefundenen Resultate auf den Fall an, daß S eine Regelfläche ist.

G. Schaake (Groningen).

Haimovici, M.: Sui ds^2 binari con data curvatura totale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 281—285 (1938).

En poursuivant l'étude de M. Levi-Civita (ce Zbl. 16, 275) l'auteur détermine en termes finis la forme canonique isotherme d'un ds^2 d'une surface dont la courbure totale K en coordonnées géodésiques u, v est de la forme: 1° $K = \varphi(u)$, 2° $K = -\frac{n(n-1)u^{n-3}\varphi(v)}{1+u^{n-1}\varphi(v)}$, où $\varphi(v)$ est périodique à période 2π , 3° $K = pu \cos v + c$.

S. Finikoff (Moscou).

Rossinski, S.: Déformation d'une congruence rectiligne avec conservation des surfaces distributives. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 19, 349—351 (1938).

Les surfaces distributives d'une congruence C sont les surfaces réglées de C dont les lignes de striction sont situées sur la surface moyenne. Les rayons de C invariablement liés avec les plans tangents orthogonaux d'une surface S , l'auteur étudie la déformation de S à réseau conjugué persistant et qui possède la propriété, à savoir: Les rayons qui composent une surface distributive de C engendrent une surface distributive

de la congruence transformée au cours de la déformation de S . Solutions: 1° S est une surface minima arbitraire qui se déforme à réseau persistant des lignes de longueur nulle, C est une congruence isotrope qui conserve cette propriété au cours de la déformation de S . Les surfaces distributives sont indéterminées. 2° S est une surface moulure de Monge, le réseau persistant est composé des lignes de courbure et correspond aux surfaces distributives de C . Les foyers de C restent invariables sur chaque rayon pendant la déformation et S est l'enveloppée moyenne de C . *S. Finikoff*.

Rossinski, S.: Sur le problème de la déformation des congruences rectilignes avec conservation de leurs surfaces distributives. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **19**, 435—437 (1938).

En poursuivant l'étude de la déformation indiquée au titre (ref. préc.) l'auteur examine la déformation d'une congruence C dont les rayons sont situés dans les plans tangents homologues d'une surface S qui se déforme à réseau conjugué persistant (p). Le réseau (p) contient une famille de géodésiques, les tangentes aux lignes de la seconde famille de (p) coupent les rayons aux centres. *S. Finikoff* (Moscou).

Yano, Kentaro: The non holonomic representation of projective spaces. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **20**, 442—450 (1938).

The author considers an affine manifold A_{n+1} with a given vector field ξ^* . The coefficients of affine connection $\Pi_{\mu\lambda}^*$ and ξ^* satisfy the following conditions

$$\Pi_{\mu\lambda}^* = \Pi_{\lambda\mu}^*; \quad V_{\mu} \xi^* = A_{\mu}^*; \quad N_{\nu\mu\lambda}^{*\dots} \xi^* = 0.$$

A vector φ_{λ} , for which $\varphi_{\lambda} \xi^{\lambda} = 1$, defines an „eingespannte“ non holonomic A_{n+1}^* . The properties of this non holonomic spaces which do not depend on the choice of φ_{λ} are the projective properties of the induced affine connection. The author obtains a projective normal parameter on each path of the non holonomic space. This parameter is determined up to a projective transformation. It is shown that the A_{n+1}^* -component of the curvature tensor $N_{\nu\mu\lambda}^{*\dots}$ is identical with the Weyl projective curvature tensor. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Gama, Lelio I.: Sur l'additivité du contingent. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 29—31 (1938).

L'additivité du contingent est démontrée pour une sommation finie ou infinie d'ensembles, comme cas particulier d'un théorème plus général sur l'additivité des fonctions limites en un point de fonctions dont la „valeur“ en un point est un ensemble borné. *E. Blanc* (Toulon).

Liebermann, J.: Über einige die konvexen Körper charakterisierende Eigenschaften. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **19**, 341—342 (1938).

Kurze Mitteilung eines Beweises für den folgenden Satz: Eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge des n -dimensionalen Raumes, die von jeder Hyperebene in einer Menge geschnitten wird, die in sich stetig auf einen Punkt zusammenziehbar ist, ist ein konvexer Körper. (Für einen eng verwandten Satz vgl. Aumann, dies. Zbl. **11**, 411; **14**, 34. Ref.) Ferner wird darauf hingewiesen, daß die Beweismethode auch eine etwas anders geartete Charakterisierung der konvexen Körper liefert. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Wajnsztejn, D.: Courbes à largeur constante. Wiadom. mat. **45**, 39—63 (1938) [Polnisch].

Bericht über die Theorie der Kurven konstanter Breite mit Darstellung der einfachsten zur Zeit bekannten Beweise für die Hauptsätze. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Mayer, Anton E.: Größte Polygone mit gegebenen Seitenvektoren. Comment. math. helv. **10**, 288—301 (1938).

Zwei (offene oder geschlossene) mit einem Durchlaufungssinn versehene Polygone P und P' im n -dimensionalen Raum werden im Anschluß an Menger kovektoriell

genannt, wenn die Seitenvektoren des einen eine Permutation der Seitenvektoren des anderen sind. Kovektorielle Polygone haben also die gleiche Länge $l(P) = l(P')$. Es sei $D(P)$ das Maximum der Durchmesser der mit P kovektoriellen Polygone. Verf. bestimmt die untere Grenze $\varrho(n)$ von $D(P)/l(P)$ für alle Polygone P mit dem Ergebnis

$$\varrho(n) = \frac{\kappa_{n-1}}{\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

wo κ_n das Volumen und ω_n die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel bezeichnen. Zunächst wird bemerkt, daß $\varrho(n)$ nicht geändert wird, wenn man nur offene oder nur geschlossene Polygone in Betracht zieht. Beim Beweis werden daher die Polygone P als geschlossen vorausgesetzt. Jedem Polygon P wird dann ein konvexes Polyeder \mathfrak{P} , nämlich die Summe (im Sinne der Theorie der konvexen Körper) der Seitenstrecken von P zugeordnet. Von \mathfrak{P} läßt sich leicht zeigen, daß es den Durchmesser $2D(P)$ und die mittlere Breite $2l(P)\kappa_{n-1}/\omega_n$ besitzt. Nun ist für jeden konvexen Körper Durchmesser \geq mittlere Breite, wobei Gleichheit für die Körper konstanter Breite, also speziell für die Kugel gilt. Also folgt $\varrho(n) \geq \kappa_{n-1}/\omega_n$, und um einzusehen, daß Gleichheit gilt, braucht man sich nur zu überzeugen, daß die Kugel durch Summen von Strecken approximiert werden kann. — Aus den geometrischen Betrachtungen ergeben sich einige teilweise sehr scharfe Abschätzungen für $\varrho(n)$. — Ferner wird für ebene Polygone gezeigt, daß die konvexen unter den mit P kovektoriellen den maximalen Durchmesser $D(P)$ besitzen. — Die sinngemäße Übertragung der Zuordnung der Polyeder \mathfrak{P} auf Kurvenbögen führt auf die namentlich von Menger betrachteten Längenmengen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Bohnenblust, F.: Convex regions and projections in Minkowski spaces. Ann. of Math., II. s. 39, 301—308 (1938).

In der Terminologie der Theorie der normierten linearen Räume lautet das Hauptergebnis folgendermaßen: Es sei L' ein n -dimensionaler Minkowskischer Raum. Dann gibt es zu jeder Hyperebene eine Projektion des Raumes auf sie, deren Norm $\leq 2(n-1)/n$ ist, und dies ist die beste nur von der Dimension abhängige Schranke: sie kann nicht verkleinert werden, wenn der Eichkörper das n -dimensionale Analogon des regulären Oktaeders ist. Als Satz über konvexe Körper lautet dies Ergebnis so: Es seien K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt M und L eine beliebige Hyperebene durch M . Dann kann K so auf L parallel projiziert werden, daß jeder Radius der Projektion höchstens $2(n-1)/n$ -mal so lang ist wie der auf demselben Halbstrahl von M gelegene Radius von K selbst. Unter einem Radius eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers wird hierbei der Durchschnitt eines vom Mittelpunkt ausgehenden Halbstrahls mit dem Körper verstanden. — Als Anwendung wird ein bekannter Satz von Jung über die kleinste eine Menge enthaltende Kugel auf Minkowskische Räume übertragen: Definiert man in naheliegender Weise den Radius ϱ der kleinsten eine Menge enthaltenden Minkowskischen Kugel, so gilt, wenn Δ den Minkowskischen Durchmesser der Menge bezeichnet, $\varrho \leq \Delta n/(n+1)$, und dies ist die beste, nur von Δ und der Dimension des Raumes abhängige Schranke. Für diesen Satz wird noch ein zweiter Beweis angegeben, der den obigen Satz nicht benutzt und zugleich einige andere verwandte Resultate liefert. — Ferner werden Andeutungen über entsprechende Sätze für Banachsche Räume gemacht und darauf hingewiesen, daß der erstgenannte Satz zur Beleuchtung der Frage nach der Existenz von Projektionsoperatoren in Banachschen Räumen dienen könnte.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Topologie:

Hamilton, O. H.: Fixed points under transformations of continua which are not connected im kleinen. Trans. Amer. Math. Soc. 44, 18—24 (1938).

The author shows first that if M is a compact decomposable metric continuum

and T is a topological transformation of M into a subset of itself, then some proper subcontinuum of M intersects its image under T . Using this and two further lemmas, the following fixed point theorem is proven: If M is a compact metric continuum such that every subcontinuum of M is decomposable and the intersection of any two subcontinua of M is either vacuous or connected, then every topological transformation of M into a subset of itself has a fixed point. Applications of this result are made to plane continua and an example is given of an acyclic continuous curve which admits no topological transformation into a subset of itself other than the identity.

G. T. Whyburn (Charlottesville).

MacLane, Saunders, and Virgil W. Addisson: Fixed points and the extension of the homeomorphisms of a planar graph. *Amer. J. Math.* **60**, 611—639 (1938).

Addisson, V. W.: Plane peanian continua with unique maps on the sphere and in the plane. *Trans. Amer. Math. Soc.* **44**, 58—67 (1938).

MacLane and Addisson characterize cyclicly connected graphs G with the following property (P). There is a homeomorphism of G into a graph G_1 on the sphere S such that every homeomorphism T of G_1 into itself may be extended to a homeomorphism of S . By considering the possible periodic homeomorphisms of S , it is seen that no T may have either of the following configurations in G_1 : (I) a circuit of fixed point plus another fixed point; (II) three distinct fixed points plus a fixed circuit (a circuit going into itself). These conditions translate into combinatorial conditions I and II on G . It is proved that G has the property (P) if and only if there is no homeomorphism σ of G of order 2 satisfying I and II, provided G is not simply four arcs, each with the same two ends. As a consequence, if G has not (P), then there is a T which cannot be extended in any map of G into S . In the proof, which is quite long, G is replaced by a simpler graph, its "skeleton", which has all the homeomorphisms that G has. — Addisson characterizes those plane Peanian continua M with the following property (Q). Given any two images M' and M'' of M on spheres S' and S'' , and a homeomorphism T of M' into M'' , T may be extended to S . A simple closed curve J in a cyclicly connected M is a "bounding circuit" of M if for any two maximal connected components H and K of $M - J$, $\bar{H} \cdot J$ and $\bar{K} \cdot J$ lie on distinct arcs AXB and AYB of J . Then (Q) holds if and only if M is an arc, a triple of arcs $PA + PB + PC$, a simple closed curve with perhaps an arc attached, or has the following property. There is a maximal triply connected cyclic element C of M such that $M - C$ is an at most countable number of arcs a_i , with $a_i \cdot a_j = 0$ ($j \neq i$), $a_i \cdot C$ being a single point lying on only one bounding circuit of C . A similar theorem is given with the sphere replaced by the plane.

Whitney (Cambridge, Mass.).

Smith, P. A.: The topology of transformation groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 497—514 (1938).

1. Es sei S eine orientierbare analytische Mannigfaltigkeit von gerader Dimension. Die Eulersche Charakteristik k von S sei negativ. t sei eine periodische, analytische, die Orientierung erhaltende Transformation von S in sich; es sei $t^m = 1$; die Potenzen t, t^2, \dots, t^{m-1} mögen nur endlich viele Fixpunkte haben. Dann gibt es eine obere Grenze für die Periode m , die nur von den Bettischen Zahlen von S abhängt. — 2. Es sei S eine orientierbare simpliziale Mannigfaltigkeit modulo m , m prim, t eine simpliziale topol. Abbildung von S auf sich mit $t^m = 1$, und L die Gesamtheit aller Fixpunkte von t . Dann gibt es für die Anzahl der p -dimensionalen Komponenten von L für jedes p eine obere Schranke, die nicht von m , sondern nur von der topologischen Struktur von S abhängt. Im Fall $m = 2$ gilt dasselbe auch für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten. Insbesondere findet man eine Schranke für die Zahl der reellen Züge von singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeiten. *van der Waerden*.

Whitney, Hassler: On products in a complex. *Ann. of Math.*, II. s. **39**, 397—432 (1938).

As previously outlined [*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **23**, 285—291 (1937)]; this

Zbl. 16, 420] this paper gives a full axiomatic treatment of products in general cell complexes. The products are of the sort introduced by Alexander and Kolmogoroff at the Moscow Conference 1935 [Ann. of Math., II. s. 37, 698—708 (1936) and Rec. math. Soc. math. Moscou 1, 97—102, 701—705 (1936); this Zbl. 15, 129 and 14, 38, 16, 139] and studied by Čech [Ann. of Math., II. s. 37, 681—697 (1936); this Zbl. 15, 131]. The complexes are the abstract ones investigated by Tucker [Ann. of Math., II. s. 34, 191—243 (1933), this Zbl. 6, 423]; the author follows quite closely the notions and methods of the latter. Part I defines the homology and cohomology groups of a general complex and discusses “dual homomorphisms”. In part II the products $A^p \cup B^q = C^{p+q}$ and $A^p \cap B^q = C^{q-p}$ are postulated in a complex which “admits a product theory”, i. e. on the closures of whose cells all cycles bound. It is shown that these products in a given complex are unique to within a multiplicative factor — the fundamental theorem of the paper. Part III establishes the combinatorial and topological invariance of the homology and cohomology groups, and also of the products in complexes which admit a product theory. Part IV relates the two products to intersections on a manifold. In Part V the products are considered in product complexes and in Euclidean space, and some mapping theorems due in part to H. Hopf are proved as applications.

A. W. Tucker (Princeton).

Alexits, Georges de: Sur la notion d'écart dans les espaces abstraits. C. R. Soc. Sci. Varsovie 31, 36—42 (1938).

Es wird untersucht, wie gewisse einfache Spezialisierungen der Abstandsdefinition die Topologie eines abstrakten Raumes R beeinflussen. Ist R halbmétrisch, nämlich der Abstand zweier Punkte p, q (d. h. eine nichtnegative Zahl $pq = qp$, die nur und stets für $p = q$ Null wird) der Bedingung unterworfen: für jedes $p \in R$ und jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $\beta > 0$ derart, daß für jedes $q \in R$ ein $\gamma > 0$ existiert, für welches die Ungleichungen $pq < \beta$ und $qr < \gamma$ die Ungleichung $pr < \alpha$ zur Folge haben, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von R Durchschnitt dessen abzählbar vieler offenen Teilmengen. Damit in R die offenen bzw. abgeschlossenen Sphäroide um beliebigen Punkt $p \in R$ (d. h. die Mengen aller $q \in R$ mit $pq < \varrho$ bzw. $pq \leq \varrho$, wo ϱ den Radius bezeichnet) offen bzw. abgeschlossen seien, ist es notwendig und hinreichend, daß pq eine ober- bzw. unterhalbstetige Funktion in bezug auf jeden der beiden Punkte sei. Ähnliche Bedingungen werden (bloß als hinreichend) für die Regularität und Metrisierbarkeit von R angegeben.

B. Knaster (Warszawa).

Mechanik.

Colonnetti, G.: Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti. II. Atti Accad. Lincei, Rend., VI. s. 27, 173—176 (1938).

Colonnetti, G.: Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti. III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 221—224 (1938).

Nach der in I. angegebenen Methode (vgl. dies. Zbl. 18, 279) wird in II. ein Fachwerkbogen mit plastischen Verformungen in zwei „überzähligen“ Stäben behandelt (der auch schon früher in einer anderen Aufsatzreihe des Verf., Su l'equilibrio dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche, IV, ds. Rend. VI. s. 25, als Beispiel diente). Es wird gezeigt, daß der nach Williot gefundene „permanente Biegungspfeil“ auch nach dem „zweiten Prinzip der Reziprozität“ des Verf. ermittelt werden kann. — In der anschließenden Note III wird als zweites Beispiel ein zylindrischer oder prismatischer Balken betrachtet und die Wirkung untersucht, die durch eine beliebige Verteilung von plastischen Verformungen $\bar{\varepsilon}_z$ (z = Richtung der Stabachse) erzielt werden. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes ist

$$\delta = \int \int \sigma_z \bar{\varepsilon}_z d\bar{f} dz,$$

worin σ' die Normalspannung in einem beliebigen Punkte vermöge einer Kraft $K = 1$ ist, die in dem Punkte und in der Richtung angreift, in dem bzw. in der man die Verschiebung ermitteln will. Es ergibt sich

$$\delta = \int (\mathcal{N} \bar{\lambda} + \mathcal{M} \bar{\mu}) dz,$$

und darin bedeuten $\bar{\lambda}$ die „plastische Dilatation“ und $\bar{\mu}$ die „plastische Krümmung“ vermöge der gegebenen plastischen Verformung. — Anwendung auf einen durchlaufenden Balken mit lotrechter Belastung. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Wendelin, H.: Ein Determinantensatz und seine Anwendung für die Verifikation eines Theorems der Hamilton-Jacobischen Theorie. *Deutsche Math.* 3, 320—325 (1938).

Milne, E. A., and G. J. Whitrow: Reversibility of the equations of classical dynamics. *Nature, Lond.* 141, 905—906 (1938).

Krbek, F. v.: Nichtlineare nichtholonome Bindungen in der Mechanik. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 48, 165—168 (1938).

Wundheiler, A.: Mouvements d'un système scléronome sur une trajectoire donnée. *Enseignement Math.* 37, 68—72 (1938).

Rakowiecki, Tadeusz: Calcul de l'orbite elliptique et parabolique à l'aide des positions nodales. *Wiadom. mat.* 45, 1—22 u. franz. Zusammenfassung 22—26 (1938) [Polnisch].

Meyer, Gertrud: Allgemeine Jupiterstörungen des Planeten 27 Euterpe. *Astron. Nachr.* 266, 245—268 (1938) u. Frankfurt a. M.: Diss. 1938.

Verf. entwickelt die Störungsausdrücke ähnlich wie Brendel, jedoch nicht nach Gliedern, die die Zeit enthalten, sondern nach den Veränderlichen φ, v . v ist die wahre Länge in der Bahn, φ wird durch die folgenden Gleichungen definiert

$$\vartheta \sin \varphi = \sin w, \quad \vartheta \cos \varphi = \cos w + \alpha$$

(w Unterschied der mittleren Längen von Jupiter und Planetoid, $\alpha = \frac{a}{a'}$, a große Halbachse des Planetoiden, a' des Jupiter). Die Entwicklung hat also die Gestalt

$$\sum_i c_i \sin(n_i \varphi + n'_i v + \lambda_i)$$

(n_i, n'_i ganz, c_i, λ_i Konstante). Sie hat den Vorteil rascherer Konvergenz. *G. Schrutka.*

Kopal, Zdeněk: On the motion of the apsidal line in close binary systems. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 98, 448—458 (1938).

Verf. bestimmt die Bewegung der Apsidenlinie unter der Annahme, daß beide Komponenten dreiachsige Ellipsoide mit wenig verschiedenen Achsen sind. Und zwar setzt er dabei voraus, daß die beiden größten Achsen in einer Geraden liegen oder daß sie um diese Lage als Mittellage kleine Schwingungen ausführen. Es folgt, daß die Apsidenlinie in der Bewegungsrichtung fortschreitet, wie dies schon H. N. Russell gefunden hat, während K. Walter meinte, das Gegenteil gezeigt zu haben. *G. Schrutka.*

Kopal, Zdeněk: On the evolution of eclipsing binaries. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 98, 651—657 (1938).

Verf. liefert einen Beitrag zur Spaltungstheorie der Doppelsterne. Da das Drehmoment konstant bleiben muß (wenn kein äußerer Einfluß vorliegt, der aber sehr selten vorkommen dürfte), so muß es schon am Anfang in derselben Größe vorhanden gewesen sein. Das ist aber bei etwas weiteren Doppelsternen nur möglich, wenn im Zeitpunkt der Spaltung der Stern keine oder nur eine schwache Zunahme der Dichte und eine starke Zunahme der Drehgeschwindigkeit gegen den Mittelpunkt zu hatte.

G. Schrutka. (Wien).

Jankowski, K.: Das Kraftproblem. Anhang zum Aufsatz: „Hydrodynamische Grundlagen der Kosmogonie“. *Astron. Nachr.* 266, 123—128 (1938).

Vgl. dies. Zbl. 16, 88, 381.